

## СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

### § 9.1. Вводные замечания. Примеры связанных контуров. Типы связи

В радиотехнике, кроме одиночных колебательных контуров, широкое применение находят так называемые связанные контуры. Эти контуры позволяют получить более совершенные резонансные кривые.

Связанными называются контуры, взаимно влияющие друг на друга.

Наибольшее распространение получили системы из двух связанных контуров. Поэтому в настоящей главе мы будем рассматривать только такие системы.

На рис. 9.1 изображено несколько схем связанных контуров.

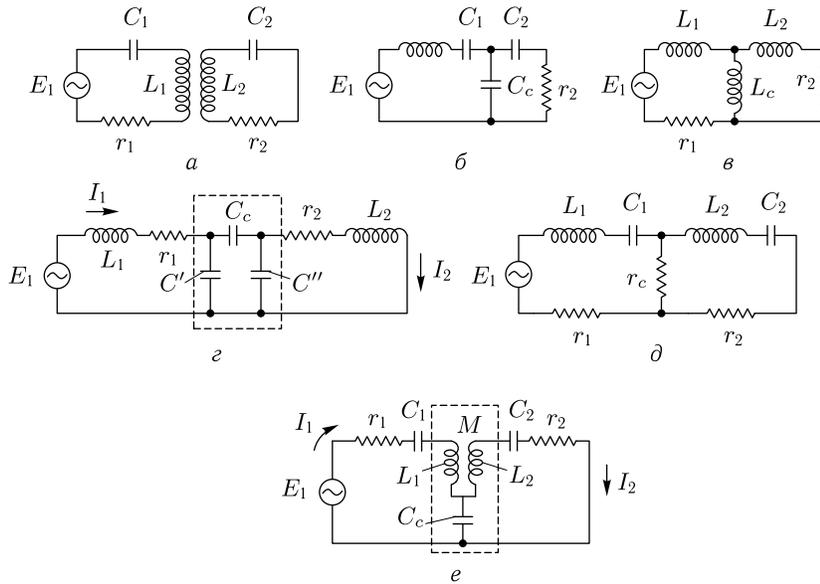


Рис. 9.1. Примеры связанных контуров: а) трансформаторная связь, б) емкостная, в) индуктивная, г) емкостная, д) гальваническая или реостатная, е) комбинированная

Условимся называть контур, в котором включена эдс, первым, а связанный с ним — вторым

Оба контура — первый и второй — могут быть колебательными (рис. 9.1 *a, г, д, e*), в ряде случаев колебательным является лишь один контур (рис. 9.1*б*), а бывает и так, что оба контура, образующие систему, — неколебательные (рис. 9.1*в*). Приведенными рисунками далеко не исчерпывается все разнообразие применяемых схем.

Элемент, входящий как в первый, так и во второй контур, называется элементом связи. Связь между контурами, изображенными на рис. 9.1*a*, называется индуктивной или трансформаторной, связь, показанная на рис. 9.1*в*, — автотрансформаторной; на рис. 9.1*б* и *г* — емкостной; на рис. 9.1*д* — реостатной или гальванической и на рис. 9.1*e* — комбинированной трансформаторно-емкостной связью.

Целью настоящей главы является изучение законов изменения напряжений, токов и мощностей, выделяющихся в контурах при изменении параметров контуров, и связи между ними, а также при воздействии на них различных эдс. В главе будут рассмотрены как вынужденные колебания, так и стационарные явления.

## § 9.2. Схемы замещения первого и второго контура

Для создания общей теории, пригодной для любых типов связанных контуров и любого вида связи, заменим четырехполюсники, обведенные на рис. 9.1 *г* и *e* пунктиром, Т-образной схемой замещения, что, как известно, всегда можно сделать. Тогда все схемы, изображенные на рис. 9.1, могут быть сведены к схеме, приведенной на рис. 9.2.

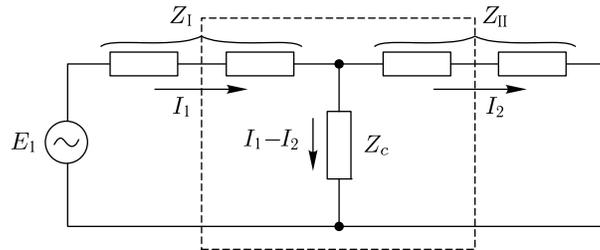


Рис. 9.2. Обобщенная схема связанных контуров

Найдем токи  $I_1$  и  $I_2$ , текущие в первом и втором контурах этой схемы. Для этого составим уравнения Кирхгофа для обоих контуров, считая эдс в первом контуре синусоидальной и режим установившимся:

$$\begin{aligned} E_1 &= Z_I I_1 + Z_c (I_1 - I_2), \\ 0 &= Z_{II} I_2 - Z_c (I_1 - I_2). \end{aligned}$$

Находя из этих уравнений токи, получим:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 - \frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_2}} = \frac{\mathbf{Z}_2 \mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_c^2}, \quad (9.1)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_2} \mathbf{I}_1 = \frac{\frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_1} \mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_2 - \frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_1}} = \frac{\mathbf{Z}_c \mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_c^2}, \quad (9.2)$$

здесь  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_c$  — суммарное сопротивление, получающееся при обходе первого контура;  $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{II} + \mathbf{Z}_c$  — суммарное сопротивление, получающееся при обходе второго контура.

Сопротивления  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  и  $\mathbf{Z}_c$  могут быть легко найдены непосредственно из схем контуров.

Для определения сопротивления  $\mathbf{Z}_1$  необходимо разомкнуть второй контур в том месте, где протекает ток  $\mathbf{I}_2$ , т. е. схему рис. 9.1 *г* разомкнуть в ветви  $r_2$ ,  $L_2$ , но не в ветви  $C''$ ; схему рис. 9.1 *е* в ветви  $C_{II}r_2$ , но не в ветви  $C_c$ . Тогда при обходе первого контура мы получим сопротивление  $\mathbf{Z}_1$  (рис. 9.2). Так например, для схемы, изображенной на рис. 9.1 *е*, мы получим

$$\mathbf{Z}_1 = r_1 - i \frac{1}{\omega C_1} + i\omega L_1 - i \frac{1}{\omega C_c}.$$

Аналогично для нахождения сопротивления  $\mathbf{Z}_2$  необходимо разомкнуть первый контур в том месте, где протекает ток  $\mathbf{I}_1$ . После этого нужно обойти второй контур. Сопротивление, получающееся при его обходе, будет сопротивлением  $\mathbf{Z}_2$ . Для схемы, изображенной на рис. 9.1 *е*,

$$\mathbf{Z}_2 = r_2 - i \frac{1}{\omega C_{II}} + i\omega L_2 - i \frac{1}{\omega C_c}.$$

Для определений сопротивления  $\mathbf{Z}_c$ , называемого сопротивлением связи, необходимо разомкнуть второй контур в том месте, где протекает ток  $\mathbf{I}_2$ , тогда отношение напряжения в этом разрыве к току  $\mathbf{I}_1$  первого контура будет равно сопротивлению связи  $\mathbf{Z}_c$ .

Справедливость сказанного очевидна для схемы, изображенной на рис. 9.2. Следовательно, этот способ применим для любых других схем связанных контуров, поскольку сводятся также к ней.

В схеме, изображенной на рис. 9.1 *е*,

$$\mathbf{Z}_c = i\omega M - i \frac{1}{\omega C_c},$$

где  $M$  — взаимная индуктивность между катушками  $L_1$  и  $L_2$ .

**Пример 9.1.** Найти  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  и  $\mathbf{Z}_c$  для схемы, изображенной на рис. 9.1 *г*.

**Решение.** Для определения  $\mathbf{Z}_1$  размыкаем второй контур в ветви  $r_2$ ,  $L_2$ . Тогда

$$\mathbf{Z}_1 = r_1 + i\omega L_1 - i \frac{1}{\omega C_1},$$

где

$$C_1 = C' + \frac{C_c C''}{C_c + C''}.$$

Для определения  $\mathbf{Z}_2$  размыкаем первый контур в ветви  $E_1$ ,  $r_1$ ,  $L_1$ . Обходя второй контур, будем иметь

$$\mathbf{Z}_2 = r_2 + i\omega L_2 - i\frac{1}{\omega C_2},$$

где

$$C_2 = C'' + \frac{C_c C'}{C_c + C'}.$$

Найдем напряжение  $\mathbf{U}_c$  на конденсаторе  $C'$  (оно же приложено к последовательно соединенным конденсаторам  $C_c$  и  $C''$ ) при разорванной ветви  $r_2$ ,  $L_2$ :

$$\mathbf{U}_c = -i\frac{\mathbf{I}_1}{\omega C_1}.$$

Напряжение  $\mathbf{U}_{2xx}$  в разрыве второго контура равно напряжению на конденсаторе  $C''$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2xx} &= \frac{\mathbf{U}_c}{-i\frac{1}{\omega C_c} - i\frac{1}{\omega C''}} \left(-i\frac{1}{\omega C''}\right) = \\ &= \frac{\mathbf{U}_c}{\frac{C''}{C_c} + 1} = -i\frac{1}{\omega C_1 \left(\frac{C''}{C_c} + 1\right)} \mathbf{I}_1 = -i\frac{1}{\omega \left(\frac{C' C''}{C_c} + C' + C''\right)} \mathbf{I}_1. \end{aligned}$$

Отсюда сопротивление связи будет равно

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{U}_{2xx}}{\mathbf{I}_1} = -\frac{i}{\omega \left(\frac{C' C''}{C_c} + C' + C''\right)}.$$

Перейдем к схемам замещения контуров.

Составим последовательный контур, содержащий (рис. 9.3) эдс  $\mathbf{E}$ , сопротивление  $\mathbf{Z}_1$ , в которое входят все сопротивления первого контура, и сопротивление

$$\mathbf{Z}'_1 = -\frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_2}, \quad (9.3)$$

которое называется сопротивлением, вносимым в первый контур.

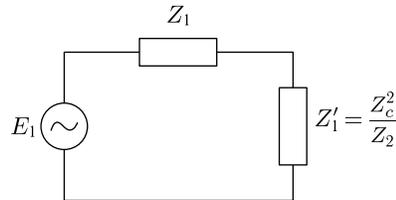


Рис. 9.3. Схема замещения первого контура.  $\mathbf{Z}'_1$  — вносимое сопротивление в первый контур

Тогда ток в этом контуре будет равен

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}'_1} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 - \frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_2}}.$$

В соответствии с ур-нием (9.1) такой же ток получается в первом контуре в системе связанных контуров. Полученная схема (рис. 9.3) называется схемой замещения первого контура.

В ней вносимое сопротивление  $\mathbf{Z}'_1$  искусственно заменяет влияние тока второго контура на ток первого. Составим схему (рис. 9.4), состоящую из эдс

$$\mathbf{E}'_2 = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_1} \mathbf{E}_1 \quad (9.4)$$

(она называется эдс, вносимой во второй контур), сопротивления  $\mathbf{Z}_2$ , содержащего все сопротивления, входящие во второй контур, и сопротивления

$$\mathbf{Z}'_2 = -\frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_1}, \quad (9.5)$$

которое называется сопротивлением, вносимым во второй контур.

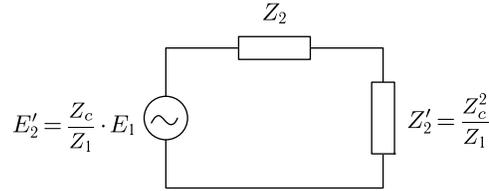


Рис. 9.4. Схема замещения второго контура.  $\mathbf{E}'_2$  — вносимая во второй контур эдс,  $\mathbf{Z}'_2$  — сопротивление, вносимое во второй контур

Тогда ток в этом контуре будет равен

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}'_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}'_2} = \frac{\frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_1} \mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_2 - \frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_1}}.$$

В соответствии с ур-нием (9.2) такой же ток получается во втором контуре системы связанных контуров. Полученная схема (рис. 9.4) называется схемой замещения второго контура. В ней вносимая эдс  $\mathbf{E}'_2$  и вносимое сопротивление  $\mathbf{Z}'_2$  искусственно заменяют влияние тока первого контура на ток второго.

Иногда для определения тока второго контура используют иную схему замещения, состоящую из эдс

$$\mathbf{E}''_2 = \mathbf{Z}_c \mathbf{I}_1 \quad (9.6)$$

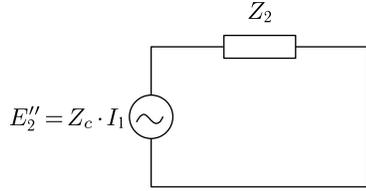


Рис. 9.5. Схема замещения второго контура.  $E_2''$  — наведенная во втором контуре эдс

(она называется эдс, наведенной во втором контуре), и сопротивления  $Z_2$  (рис. 9.5). Ток в этой схеме будет равен

$$I_2 = \frac{E_2''}{Z_2} = \frac{Z_c}{Z_2} I_1,$$

т. е. в соответствии с уравнением (9.2) равен току второго контура системы связанных контуров. Эта схема более проста, но в ряде случаев ею пользоваться бывает неудобно, поскольку

при изменении  $Z_2$  в этой схеме замещения будет меняться не только сопротивление контура, но и эдс  $E_2''$ , так как в нее входит ток  $I_1$ , определяемый ф-лой (9.1) и зависящий от  $Z_2$ .

Для анализа процессов в связанных контурах примем, что

$$\begin{cases} Z_1 = r_1 + ix_1 \\ Z_2 = r_2 + ix_2 \\ Z_c = ix_c. \end{cases} \quad (9.7)$$

Таким образом, мы для упрощения анализа будем считать, что сопротивление связи  $Z_c$  не имеет активной составляющей. Это не приведет к существенной погрешности при практических расчетах, поскольку обычно  $x_c$  бывает величиной того же порядка, что  $r_1$  и  $r_2$ , а активная составляющая  $r_c$ , если она специально не увеличена, бывает в десятки и сотни раз меньше  $x_c$ , т. е. много меньше  $r_1$  и  $r_2$ . Схему рис. 9.1д, редко встречающуюся в радиоустройствах, мы рассматривать, таким образом, не будем.

Найдем выражения для вносимых сопротивлений  $Z_1'$  и  $Z_2'$  и вносимой эдс  $E_2'$  с учетом обозначений (9.7).

Сопротивление, вносимое в первый контур, равно

$$Z_1' = -\frac{Z_c^2}{Z_2} = \frac{x_c^2}{r_2 + ix_2} = r_2 \frac{x_c^2}{r_2^2 + x_2^2} - ix_2 \frac{x_c^2}{r_2^2 + x_2^2} = r_1' + ix_1', \quad (9.8)$$

$r_1'$  называется вносимым активным сопротивлением,  $x_1'$  — вносимым реактивным сопротивлением.

Введем обозначение

$$\gamma_2 = \frac{|x_c|}{\sqrt{r_2^2 + x_2^2}} = \frac{Z_c}{Z_2}. \quad (9.9)$$

Тогда

$$r_1' = r_2 \gamma_2^2, \quad (9.10)$$

$$x_1' = -x_2 \gamma_2^2. \quad (9.11)$$

Аналогично

$$\mathbf{Z}'_2 = r'_2 + ix'_2, \quad (9.12)$$

где

$$r'_2 = r_1 \gamma_1^2, \quad (9.13)$$

$$x'_2 = -x_1 \gamma_1^2, \quad (9.14)$$

$$\gamma_1 = \frac{|x_c|}{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}} = \frac{Z_c}{Z_1}. \quad (9.15)$$

Эффективное значение вносимой эдс  $E'_2$  на основании (9.4) равно

$$E'_2 = \frac{Z_c}{Z_1} E_1 = \gamma_1 E_1. \quad (9.16)$$

Наконец, из ур-ния (9.2) следует, что эффективное значение тока  $I_2$ , протекающего во втором контуре, равно

$$I_2 = \frac{Z_c}{Z_2} I_1 = \gamma_2 I_1. \quad (9.17)$$

На рис. 9.6 и 9.7 представлены развернутые схемы замещения первого и второго контура, построенные на основании материала данного параграфа.

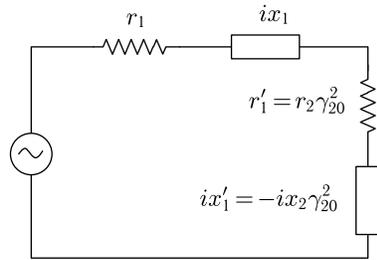


Рис. 9.6. Развернутая схема замещения первого контура.  $r_1$  и  $x_1$  — активное и реактивное сопротивления первого контура;  $r'_1$  и  $x'_1$  — вносимые в первый контур активное и реактивное сопротивления

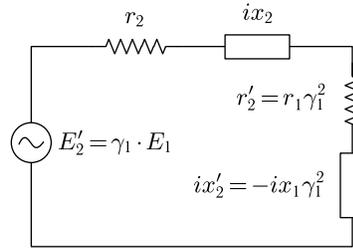


Рис. 9.7. Развернутая схема замещения второго контура.  $r_2$  и  $x_2$  — активное и реактивное сопротивления второго контура;  $r'_2$  и  $x'_2$  — вносимые во второй контур активное и реактивное сопротивления;  $E'_2$  — вносимая во второй контур эдс

### § 9.3. Резонансы в связанных контурах

При изменении параметров связанных контуров, либо частоты эдс, в первом или втором контуре, а иногда и одновременно в обоих могут иметь место резонансы.

Резонанс может наступить в схеме замещения первого контура. В этом случае

$$x_1 + x'_1 = 0. \quad (9.18)$$

Если это условие удовлетворяется, то говорят, что в системе связанных контуров наступил первый частичный резонанс.

Далее резонанс может наступить в схеме замещения второго контура, при этом

$$x_2 + x'_2 = 0. \quad (9.19)$$

Если это условие удовлетворяется, то говорят, что в системе связанных контуров наступил второй частичный резонанс.

Может иметь место такое состояние системы, когда оба контура — первый и второй — настроены в резонанс с частотой эдс, т. е. когда одновременно выполняются условия

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0, \end{array} \right\} \quad (9.20)$$

а, следовательно, в соответствии с ф-лами (9.11) и (9.14) условия

$$\boxed{\begin{array}{l} x'_1 = 0, \\ x'_2 = 0. \end{array}}$$

Это состояние называется полным резонансом. При полном резонансе, очевидно, одновременно будут иметь место и первый, и второй частичные резонансы.

Наконец, при одновременном выполнении условий

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x'_1 = 0 \\ r_1 = r'_1 \end{array}} \quad (9.21)$$

в системе имеет место так называемый оптимальный или сложный резонанс. Как будет показано ниже, при оптимальном резонансе ток  $I_2$  во втором контуре при заданных  $E_1$ ,  $r_1$  и  $r_2$  достигает максимально возможного значения.

На основании равенств (9.21), (9.10) и (9.11) можно записать

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -x'_1 = x_2 \gamma_{20}^2 \\ r_1 = r'_1 = r_2 \gamma_{20}^2 \end{array} \right\} \quad (9.22)$$

где  $\gamma_{20}$  — значение  $\gamma_2$  при оптимальном резонансе.

Найдем значение  $\gamma_1$  при оптимальном резонансе. Оно на основании ф-л (9.15) и (9.22) будет равно

$$\gamma_{10} = \frac{x_c}{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}} = \frac{x_c}{\sqrt{r_2^2 \gamma_{20}^4 + x_2^2 \gamma_{20}^4}} = \frac{x_c}{\gamma_{20}^2 \sqrt{r_2^2 + x_2^2}} = \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{20}^2} = \frac{1}{\gamma_{20}}.$$

Принимая это во внимание, в соответствии с ф-лами (9.13), (9.14) и (9.22) получим:

$$\begin{aligned} x_2' &= -x_1 \gamma_{10}^2 = -\frac{x_1}{\gamma_{20}^2} = -x_2, \\ r_2' &= r_1 \gamma_{10}^2 = \frac{r_1}{\gamma_{20}^2} = r_2. \end{aligned}$$

Таким образом, если удовлетворяются условия (9.21), то одновременно будут выполняться условия

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 + x_2' &= 0 \\ r_2 &= r_2' \end{aligned}} \quad (9.23)$$

Аналогичным способом можно показать, что при выполнении условий (9.23) выполняются условия (9.21), т. е. те и другие являются условиями наличия оптимального резонанса. При оптимальном резонансе существуют одновременно первый и второй частичные резонансы.

#### § 9.4. Энергетические соотношения в связанных контурах

Найдем мощность, отбираемую от источника эдс и расходуемую в первом и втором контуре.

Мощность  $P_1$ , расходуемая в первом контуре, равна

$$\boxed{P_1 = I_1^2 r_1.} \quad (9.24)$$

Мощность  $P_2$ , расходуемая во втором контуре, равна

$$\boxed{P_2 = I_2^2 r_2,} \quad (9.25)$$

или с учетом (9.17) и (9.10)

$$P_2 = I_1^2 \gamma_2^2 r_2 = I_1^2 r_1'.$$

Таким образом, мощность, фактически расходуемая во втором контуре, численно равна мощности, которая как бы теряется на вносимом активном сопротивлении в схеме замещения первого контура.

Полная мощность, отдаваемая источником эдс и расходуемая в обоих контурах, равна

$$P = P_1 + P_2. \quad (9.26)$$

Найдем максимальную мощность, которая может быть передана во вторичный контур при заданных величинах  $E_1$  и  $r_1$ . По схеме замещения первого контура (рис. 9.6) видно, что

$$P_2 = I_1^2 r'_1 = \frac{E_1^2}{(r_1 + r'_1)^2 + (x_1 + x'_1)^2} r'_1.$$

Очевидно, что чем меньше величина  $(x_1 + x'_1)^2$ , тем больше мощность  $P_2$ . Выберем параметры контуров так, чтобы выполнялось условие

$$x_1 + x'_1 = 0, \quad (9.27)$$

т. е. чтобы наступил первый частичный резонанс. При этом

$$P_2 = P_{2m} = \frac{E_1^2 r'_1}{(r_1 + r'_1)^2} = \frac{E_1^2}{r_1} \frac{\frac{r'_1}{r_1}}{\left(1 + \frac{r'_1}{r_1}\right)^2}. \quad (9.28)$$

Зависимость  $P_{2m}$  от  $\frac{r'_1}{r_1}$  показана на рис. 9.8. Как нетрудно убедиться,  $P_{2m}$  с изменением  $r'_1/r_1$  достигает максимума при

$$r'_1 = r_1.$$

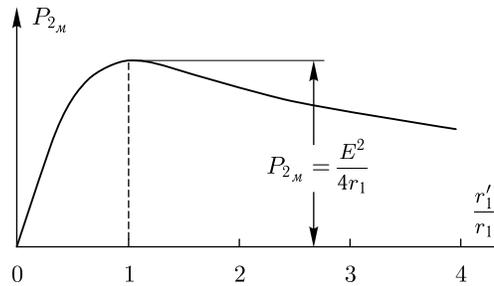


Рис. 9.8. Мощность  $P_{2m}$ , передаваемая во второй контур при первом частичном резонансе, как функция  $\frac{r'_1}{r_1}$

Таким образом, при заданных величинах  $E_1$  и  $r$  максимальная мощность, передаваемая во второй контур, будет при оптимальном резонансе. Она равна

$$\boxed{P_{2mm} = \frac{E_1^2}{4r_1}}. \quad (9.29)$$

Из этого уравнения, учитывая ф-лу (9.25), нетрудно определить ток, который при этом будет протекать во втором контуре. Он равен

$$I_{2\text{мм}} = \sqrt{\frac{P_{2\text{м}}}{r_2}} = \frac{E_1}{2\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (9.30)$$

Это выражение определяет максимально возможный ток, могущий протекать во втором контуре при заданных  $E_1$ ,  $r_1$  и  $r_2$ . Он получается при оптимальном резонансе.

Коэффициентом полезного действия первого контура называют величину

$$\eta = \frac{P_2}{P} = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{I_1^2 r_1'}{I_1^2 r_1 + I_1^2 r_1'} = \frac{r_1'}{r_1 + r_1'}$$

или

$$\eta = \frac{\frac{r_1'}{r_1}}{1 + \frac{r_1'}{r_1}}. \quad (9.31)$$

На рис. 9.9 приведена зависимость коэффициента полезного действия первого контура  $\eta$  от отношения  $\frac{r_1'}{r_1}$ .

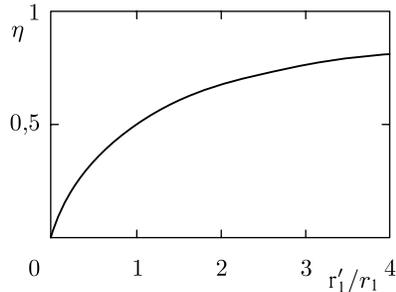


Рис. 9.9. Кпд первого контура  $\eta$  как функция  $\frac{r_1'}{r_1}$

Из рис. 9.8 и 9.9, а также из ф-лы 9.30 видно, что при оптимальном резонансе, когда мощность  $P_2$  максимальна,  $\eta = 0,5$ . При дальнейшем увеличении связи между контурами, т. е. с ростом величины  $r_1'$ , мощность  $P_2$  начинает падать, а кпд  $\eta$  продолжает расти.

**Пример 9.2.** Связанные контуры, изображенные на рис. 9.1 а, имеют следующие данные:

$$\begin{aligned} L_1 &= 4 \text{ мГн}; & L_2 &= 1 \text{ мГн}; \\ C_1 &= 280 \text{ пФ}; & C_2 &= 900 \text{ пФ}; \\ r_1 &= 20 \text{ Ом}; & r_2 &= 10 \text{ Ом}. \\ M &= 40 \text{ мкГн}; \end{aligned}$$

В первый контур включена эдс, эффективное значение которой  $E_1 = 10$  В, а частота  $\omega = 10^6$  1/с. Требуется: 1) найти мощность  $P_2$ , выделяющуюся во втором контуре, 2) определить, как нужно изменить  $C_1$  и  $M$ , чтобы мощность, передаваемая во второй контур, стала максимальной, 3) определить, чему равна эта мощность.

Решение 1. Находим  $x_c$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_2^2$ ,  $x'_1$  и  $r'_1$ :

$$x_c = \omega M = 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-6} = 40 \text{ Ом},$$

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^6 \cdot 280 \cdot 10^{-12}} = 430 \text{ Ом},$$

$$x_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^6 \cdot 900 \cdot 10^{-12}} = -110 \text{ Ом},$$

$$\gamma_2^2 = \frac{x_c^2}{r_2^2 + x_2^2} = \frac{40^2}{10^2 + 110^2} = 0,131,$$

$$x'_1 = -\gamma_2^2 x_2 = -0,131(-110) = 14,4 \text{ Ом},$$

$$r'_1 = \gamma_2^2 r_2 = 0,131 \cdot 10 = 1,31 \text{ Ом}.$$

2. Определяем ток в первом контуре:

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(r_1 + r'_1)^2 + (x_1 + x'_1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{(20 + 1,31)^2 + (430 + 14,4)^2}} = 0,0225 \text{ А} = 22,5 \text{ мА}.$$

3. Находим мощность во втором контуре:

$$P_2 = I_1^2 r'_1 = 0,0225^2 \cdot 1,31 = 0,000662 \text{ Вт} = 0,662 \text{ мВт}.$$

4. Определяем  $\gamma_{20}^2$ ,  $M_0$ :

$$\gamma_{20}^2 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{20}{10} = 2.$$

С другой стороны

$$\gamma_{20}^2 = \frac{(\omega M_0)^2}{r_2^2 + x_2^2},$$

где  $M_0$  — взаимная индуктивность при оптимальном резонансе.

Таким образом,

$$(\omega M_0)^2 = \gamma_{20}^2 (r_2^2 + x_2^2) = 2(10^2 + 110^2) = 24\,400 \text{ Ом}^2.$$

Отсюда

$$M_0 = \frac{\sqrt{24\,400}}{10^6} = 156 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 156 \text{ мкГн}.$$

5. Находим  $x'_1$  и  $r'_1$  при  $M = M_0$ :

$$x'_1 = -\gamma_{20}^2 x_2 = -2(-110) = 220 \text{ Ом},$$

$$r'_1 = \gamma_{20}^2 r_2 = r_1 = 20 \text{ Ом}.$$

6. Находим значение  $x_1$  и  $C_1$  при оптимальном резонансе:

$$x_1 = -x'_1 = -220 \text{ Ом}.$$

Поскольку  $x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ , имеем

$$\frac{1}{\omega C_1} = \omega L_1 - x_1 = 4000 + 220 = 4220 \text{ Ом}.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{1}{4220 \cdot \omega} = \frac{1}{4220 \cdot 10^6} = 237 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 237 \text{ пФ.}$$

7. Определяем ток в первом контуре при оптимальном резонансе:

$$I_1 = \frac{E}{r_1 + r'_1} = \frac{E}{2r_1} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ А.}$$

8. Находим максимальную мощность, передаваемую во второй контур при оптимальном резонансе:

$$P_{2\text{мм}} = I_1^2 \cdot r'_1 = 0,25^2 \cdot 20 = 1,25 \text{ Вт}$$

или

$$P_{2\text{мм}} = \frac{E^2}{4r_1} = \frac{10^2}{80} = 1,25 \text{ Вт.}$$

**Пример 9.3.** Найти кпд первого контура для двух случаев, разобранных в предыдущем примере.

**Решение.** В первом случае кпд  $\eta$  равен

$$\eta = \frac{r'_1}{r_1 + r'_1} = \frac{1,31}{20 + 1,31} = 0,0615.$$

Во втором случае имеет место оптимальный резонанс и

$$\eta = 0,5.$$

### § 9.5. Резонансные явления в связанных контурах при изменении $x_1$

Рассмотрим, как будут меняться проводимости связанных контуров, и токи в контурах при изменении реактивного сопротивления первого контура  $x_1$ .

Ток первого контура равен

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_{1\text{э}} \mathbf{E}_1,$$

где  $\mathbf{Y}_{1\text{э}}$  — проводимость схемы замещения первичного контура. На основании рис. 9.6 она равна:

$$\mathbf{Y}_{1\text{э}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1 - \frac{\mathbf{Z}_c^2}{\mathbf{Z}_2}} = \frac{1}{r_1 + r'_1 + i(x_1 + x'_1)} = \frac{1}{(r_1 + r'_1)(1 + i\xi_{1\text{э}})}, \quad (9.32)$$

где

$$\xi_{1\text{э}} = \frac{x_1 + x'_1}{r_1 + r'_1}.$$

Сравнивая эту формулу с ф-лой (4.7) для проводимости последовательного колебательного контура, мы видим, что она точно такая же, только вместо обобщенной расстройки  $\xi$  стоит эквивалентная обобщенная расстройка первого контура  $\xi_{1\text{э}}$  и вместо сопротивления контура  $r$  стоит эквивалентное сопротивление первого контура  $r_1 + r'_1$ . Отсюда следует, что зависимости модуля и аргумента  $\mathbf{Y}_{1\text{э}}$  от  $\xi_{1\text{э}}$  и  $r_1 + r'_1$  будут

такие же, как и для последовательного колебательного контура и будут соответствовать ф-лам (4.9) и (4.8) и рис. 4.6 и 4.5.

При  $\xi_{1\varepsilon} = 0$ ,  $x_1 + x'_1 = 0$  и наступает первый частичный резонанс. В этом случае проводимость  $Y_{1\varepsilon p}$  максимальна, активна и равна

$$Y_{1\varepsilon p} = \frac{1}{r_1 + r'_1} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r'_1}{r_1}}. \quad (9.33)$$

Зависимость  $Y_{1\varepsilon p}$  от  $\frac{r'_1}{r_1}$  дана на рис. 9.10. Как видно из этого рисунка и ф-лы (9.33), с увеличением  $r'_1$ , которое растет с увеличением связи между контурами,  $Y_{1\varepsilon p}$  уменьшается.

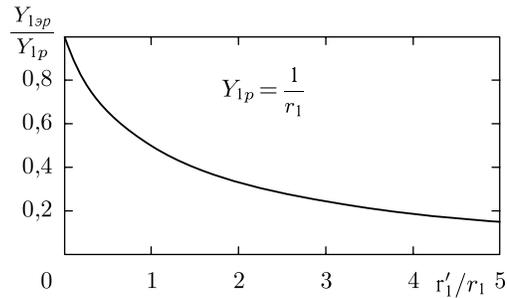


Рис. 9.10. Зависимость проводимости схемы замещения первого контура  $Y_{1\varepsilon p}$  при первом частичном резонансе от  $\frac{r'_1}{r_1}$

Выразим  $\xi_{1\varepsilon}$  через обобщенную расстройку первого контура  $\xi_1 = \frac{x_1}{r_1}$ .

Зависимость этой расстройки от различных факторов детально исследовалась в § 4.3. Имеем:

$$\xi_{1\varepsilon} = \frac{x_1 + x'_1}{r_1 + r'_1} = \frac{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x'_1}{r_1}}{1 + \frac{r'_1}{r_1}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{x'_1}{r_1} = \frac{-x_2 \gamma_2^2}{r_1} = \frac{-x_2}{r_2} \cdot \frac{\gamma_2^2 r_2}{r_1} = -\frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{r'_1}{r_1} = -\xi_2 \frac{r'_1}{r_1},$$

где  $\xi_2 = \frac{x_2}{r_2}$  — обобщенная расстройка второго контура, получим

$$\xi_{1\text{э}} = \frac{1}{1 + \frac{r'_1}{r_1}} \left( \xi_1 - \xi_2 \frac{r'_1}{r_1} \right). \quad (9.34)$$

Таким образом,  $\xi_{1\text{э}}$  будет меняться линейно с изменением  $\xi_1$ .

При  $\xi_2 = 0$   $\xi_{1\text{э}}$  будет меняться пропорционально  $\xi_1$ . Зависимость  $Y_{1\text{э}}$  от  $\xi_1$  для этого случая изображена на рис. 9.11. Как мы видим из этого рисунка, с увеличением  $\frac{r'_1}{r_1}$ , т. е. связи между контурами, резонансные значения проводимости уменьшаются и резонансные кривые расширяются, поскольку  $\xi_{1\text{э}}$  меняется в  $1 + \frac{r'_1}{r_1}$  раз медленнее, чем  $\xi_1$ .

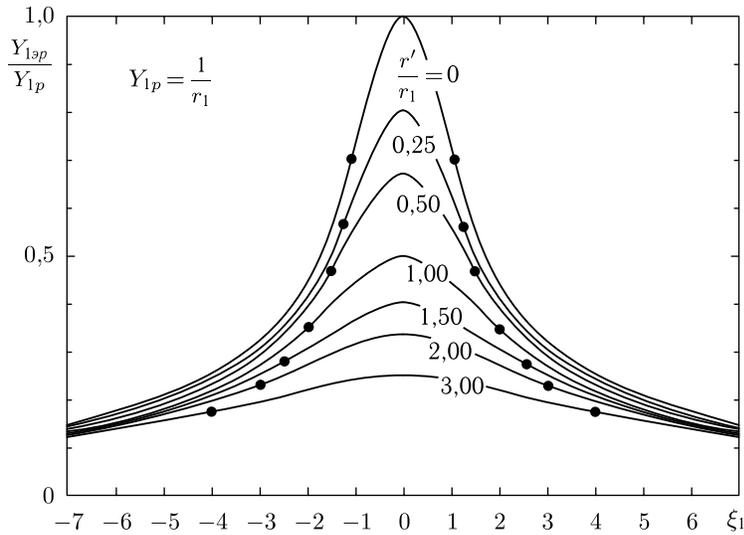


Рис. 9.11. Резонансные кривые проводимости схемы замещения первого контура  $Y_{1\text{э}}$  для разных  $\frac{r'_1}{r_1}$  при  $\xi_2 = 0$ . Точками на кривых обозначены границы полосы пропускания

Границам полосы пропускания, определенным из резонансной кривой так же, как это делалось для одиночного контура, будет соответствовать

$$\xi_{1\text{э}} = \frac{\xi_1}{1 + \frac{r'_1}{r_1}} = \pm 1,$$

т. е.

$$\xi_1 = \pm \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right).$$

Отсюда ширина полосы пропускания, выраженная в обобщенной расстройке первого контура, будет равна

$$\boxed{2\Delta\xi_1 = 2 \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right)}. \quad (9.35)$$

Границы полосы пропускания отмечены на кривых рис. 9.11 точками.

Эта деформация резонансных кривых может быть наглядно объяснена тем, что с увеличением связи увеличивается эквивалентное активное сопротивление схемы замещения первого контура  $r_1 + r'_1$ .

Если  $\xi_2 \neq 0$ , то зависимости  $\xi_{1\vartheta}$  от  $\xi_1$  и, следовательно,  $Y_{1\vartheta}$  от  $\xi_1$  будут такие же, только из всех значений  $\xi_1$  надо будет вычитать постоянную величину  $\xi_2 \frac{r'_1}{r_1}$ . Это поведет к тому, что все кривые сдвигнутся на  $\xi_2 \frac{r'_1}{r_1}$  и резонанс наступит при  $\xi_1 = \xi_2 \frac{r'_1}{r_1}$ . Если  $\xi_2 > 0$ , сдвиг будет вправо, если же  $\xi_2 < 0$ , то сдвиг будет влево. Этот сдвиг при постоянном  $\xi_2$  будет увеличиваться пропорционально увеличению  $\frac{r'_1}{r_1}$ , т. е. с увеличением связи между контурами.

На рис. 9.12 представлена зависимость  $Y_{1\vartheta}$  от  $\xi_1$  при  $\xi_2 = 2$  для различных значений  $\frac{r'_1}{r_1}$ . Сдвиг резонансных кривых с увеличением связи можно наглядно объяснить тем, что при этом увеличивается вносимое реактивное сопротивление, которое приходится при резонансе компенсировать реактивным сопротивлением первого контура.

Аргумент  $Y_{1\vartheta}$  аналогично аргументу проводимости последовательного колебательного контура равен

$$\boxed{-\beta_{1\vartheta} = -\operatorname{arctg} \xi_{1\vartheta} = -\operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - \xi_2 \frac{r'_1}{r_1}}{1 + \frac{r'_1}{r_1}}}. \quad (9.36)$$

Подробно его мы исследовать не будем, это можно сделать аналогично предыдущему.

Перейдем к изучению зависимости тока второго контура от  $x_1$ . Ток второго контура определяется выражением (9.2), которое можно переписать в виде

$$\boxed{\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{E}_1}, \quad (9.37)$$

где

$$\boxed{\mathbf{Y}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_c^2}}. \quad (9.38)$$

Величину  $\mathbf{Y}_{12}$  мы назовем взаимной проводимостью между контурами. Отметим, что если эдс  $\mathbf{E}_2$  будет действовать во втором контуре, то ток в первом контуре  $\mathbf{I}_1$ , исходя из соображений симметрии, может

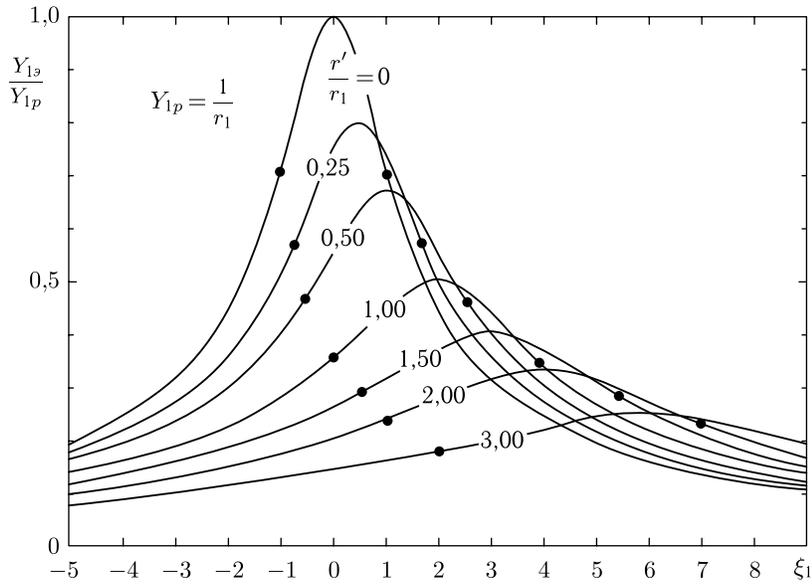


Рис. 9.12. Резонансные кривые проводимости схемы замещения первого контура  $Y_{13}$  для разных  $\frac{r_1'}{r_1}$  при  $\xi_2 = 2$ . Точками на кривых обозначены границы полосы пропускания

быть выражен также ф-лой (9.2), в которой надо будет поменять местами индексы 1 и 2:

$$I_1 = Y_{21}E_2 = \frac{Z_c E_2}{Z_2 Z_1 - Z_c^2}.$$

Отсюда следует, что  $Y_{21} = Y_{12}$ . Это оправдывает название «взаимная проводимость».

Поскольку ток  $I_2$  пропорционален  $Y_{12}$ , мы будем в дальнейшем изучать зависимость  $Y_{12}$  от  $x_1$ .

Поделив числитель и знаменатель ф-лы (9.38) на  $Z_2$ , получим

$$Y_{12} = \frac{\frac{Z_c}{Z_2}}{Z_1 - \frac{Z_c^2}{Z_2}}$$

или, если принять во внимание обозначение (9.32),

$$\boxed{Y_{12} = \frac{Z_c}{Z_2} Y_{13}}. \tag{9.39}$$

Поскольку  $Z_c$  и  $Z_2$  от  $x_1$  не зависят,  $Y_{12}$  будет меняться с изменением  $x_1$  и  $\xi_1$  так же, как  $Y_{1э}$ , отличаясь от него на постоянный множитель

$$\boxed{\frac{Z_c}{Z_2} = \frac{ix_c}{r_2 + ix_2} = \frac{Z_c e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}{Z_2 e^{i\beta_2}} = \gamma_2 e^{i(\pm\frac{\pi}{2} - \beta_2)},} \quad (9.40)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{x_2}{r_2} = \operatorname{arctg} \xi_2, \\ \gamma_2 &= \frac{Z_c}{Z_2}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

В (9.40) знак (+) берется при  $x_c > 0$ , что может иметь место при связи индуктивного характера; знак (–) берется при  $x_c < 0$ , т. е. при связи емкостного характера.

Из выражения (9.39) следует, что аргумент  $Y_{12}$  будет меняться с изменением  $x_1$  и  $\xi_1$  так же, как аргумент  $Y_{1э}$ , отличаясь от него на постоянную величину  $\pm\frac{\pi}{2} - \beta_2$ . Модуль  $Y_{12}$  будет меняться так же, как модуль  $Y_{1э}$ , отличаясь от него на постоянный множитель  $\gamma_2$ .

Из сказанного следует, что максимум  $Y_{12}$  при изменении  $\xi_1$  будет наступать одновременно с максимумом  $Y_{1э}$ , т. е. при первом частичном резонансе. Найдем значение этого максимума  $Y_{12м}$ .

При первом частичном резонансе

$$Y_{1эп} = \frac{1}{r_1 + r_1'},$$

откуда

$$Y_{12м} = \gamma_2 Y_{1эп} = \frac{\gamma_2}{r_1 + r_1'},$$

или, поскольку на основании ф-лы (9.10)

$$\gamma_2^2 = \frac{r_1'}{r_2},$$

$$\boxed{Y_{12м} = \frac{\sqrt{\frac{r_1'}{r_2}}}{r_1 + r_1'} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{r_1'}{r_1}}}{1 + \frac{r_1'}{r_1}}.} \quad (9.42)$$

Зависимость  $Y_{12м}$  от  $\frac{r_1'}{r_1}$  изображена на рис. 9.13.

Как видно из этого рисунка и ф-лы (9.42),  $Y_{12м}$  будет иметь максимум

$$\boxed{Y_{12мм} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}}}$$

при

$$r_1' = r.$$

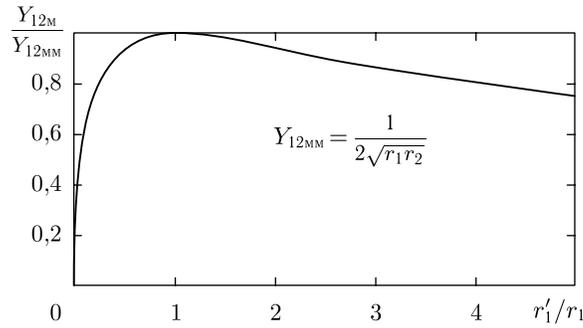


Рис. 9.13. Зависимость модуля взаимной проводимости  $Y_{12M}$  при первом частичном резонансе от  $\frac{r'_1}{r_1}$  или при втором частичном резонансе от  $\frac{r'_2}{r_2}$

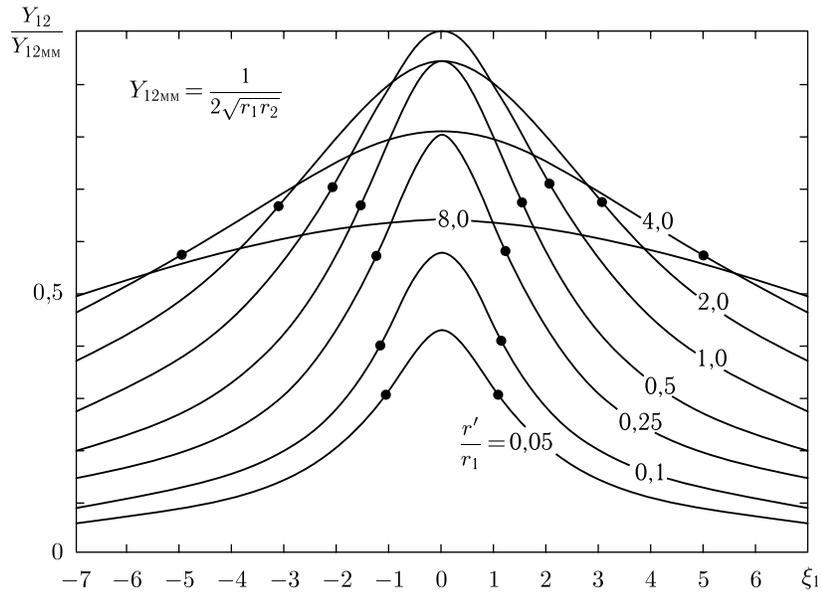


Рис. 9.14. Резонансные кривые взаимной проводимости для разных  $\frac{r'_1}{r_1}$  при изменении  $\xi_1$  и  $\xi_2 = 0$  (или для разных  $\frac{r'_2}{r_2}$ , при изменении  $\xi_2$  и  $\xi_1 = 0$ )

Поскольку мы уже приняли, что существует первый частичный резонанс, то ясно, что  $Y_{12MM}$  будет наступать при оптимальном резонансе. Ток во втором контуре в этом случае будет равен

$$I_{2M} = Y_{12MM} E_1 = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}} E_1, \quad (9.43)$$

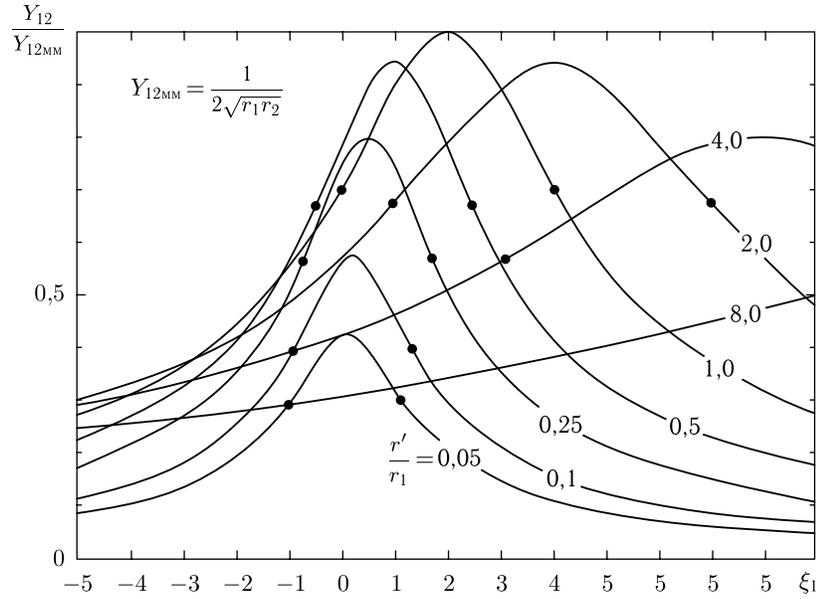


Рис. 9.15. Резонансные кривые взаимной проводимости для разных  $\frac{r_1'}{r_1}$  при изменении  $\xi_1$  и  $\xi_2 = 2$  (или разных  $\frac{r_2'}{r_2}$  при изменении  $\xi_2$  и  $\xi_1 = 2$ )

что соответствует максимально возможному току во втором контуре [см. ф-лу (9.30)], наступающему при оптимальном резонансе.

Зависимости  $Y_{12}$  от  $\xi_1$  для случая  $\xi_2 = 0$  при различных  $\frac{r_1'}{r_1}$  даны на рис. 9.14.

Эти кривые отличаются от соответствующих кривых рис. 9.11 лишь постоянными множителями  $\gamma_2 = \sqrt{\frac{r_1'}{r_2}}$ , поэтому их ширина будет та же, что и кривых  $Y_{1э}$  (рис. 9.11). Как видно из рис. 9.14, резонансная кривая  $Y_{12}$  с увеличением  $\frac{r_1'}{r_1}$  (т. е. с увеличением связи) сначала резко возрастает, почти не расширяясь. При  $\frac{r_1'}{r_1} = 1$  кривая достигает максимума. При этом она в соответствии с ф-лой (9.35) расширится вдвое. Затем резонансное значение  $Y_{12м}$  постепенно уменьшается, в то время, как ширина кривой продолжает увеличиваться.

Уменьшение  $Y_{12м}$  с увеличением связи при  $\frac{r_1'}{r_1} > 1$  объясняется тем, что при этом вносимое активное сопротивление в первый контур  $r_1'$  сильно снижает ток  $I_1$ , и это уменьшает, несмотря на увеличение связи, мощность, передаваемую во второй контур.

В случае, если  $\xi_2 \neq 0$ , кривые  $Y_{12}$  будут сдвигаться в сторону так же, как и кривые  $Y_{19}$ , на величину  $\xi_2 \frac{r'_1}{r_1}$ . Зависимость  $Y_{12}$  от  $\xi_1$  при различных  $\frac{r'_1}{r_1}$  для  $\xi_2 = 2$  изображена на рис. 9.15. Эти кривые соответствуют кривым для  $Y_{19}$  (рис. 9.12).

### § 9.6. Резонансные явления в связанных контурах при изменении $x_2$

В этом параграфе мы исследуем зависимость взаимной проводимости  $Y_{12}$  от  $x_2$  или, что то же, от  $\xi_2 = \frac{x_2}{r_2}$ .

Величина  $Y_{12}$  определяется ф-лой (9.38). Как видно из этой формулы,  $Z_2$  влияет на  $Y_{12}$ , точно так же, как  $Z_1$ .

Отсюда следует, что зависимость  $Y_{12}$  от  $\xi_2 = \frac{x_2}{r_2}$  будет такая же, как и изученная в предыдущем параграфе зависимость  $Y_{12}$  от  $\xi_1 = \frac{x_1}{r_1}$ . Таким образом, полученные ранее результаты могут быть распространены на данный случай.

Учитывая сказанное, мы не будем проводить дополнительные исследования, а сформулируем лишь выводы, исходя из данных предыдущего параграфа.

$Y_{12}$  изменяется в зависимости от  $\xi_2$  в соответствии с рис. 9.14 и 9.15. В этих рисунках нужно только у  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $r_1$  и  $r'_1$  поменять индексы 1 на 2 и 2 на 1.

Максимальное значение  $Y_{12}$  при изменении  $x_2$  наступает при втором частичном резонансе, когда

$$x_2 + x'_2 = 0,$$

или, что то же, когда

$$\xi_2 = \xi_1 \frac{r'_2}{r_2}.$$

Это следует и непосредственно из схемы замещения второго контура, изображенной на рис. 9.7.

Максимальное значение  $Y_{12}$  определяется формулой

$$Y'_{12m} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{r'_2}{r_2}}}{1 + \frac{r'_2}{r_2}} \quad (9.44)$$

[она аналогична ф-ле (9.42)] и зависит от  $\frac{r'_2}{r_2}$  так, как показано на рис. 9.13, в котором для данного случая надо вместо  $\frac{r'_1}{r_1}$  подставить  $\frac{r'_2}{r_2}$ .

Максимальное значение  $Y'_{12м}$  будет наступать при  $\frac{r'_2}{r_2} = 1$ , т. е. когда будут соблюдаться условия (9.23) оптимального резонанса, и будет равно

$$Y_{12мм} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}},$$

что соответствует ф-ле (9.43).

Ширина полосы пропускания резонансной кривой, выраженная в обобщенной расстройке, равняется

$$2\Delta\xi_2 = 2 \left( 1 + \frac{r'_2}{r_2} \right)$$

[см. ф-лу (9.35)] и увеличивается с увеличением  $\frac{r'_2}{r_2}$ . Это объясняется увеличением активного сопротивления в схеме замещения второго контура с увеличением связи (рис. 9.7).

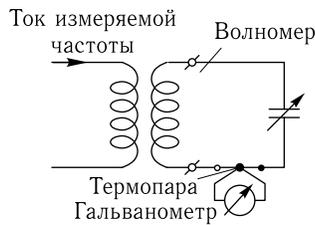


Рис. 9.16. Схема резонансного волномера, индуктивно связанного с цепью тока измеряемой частоты

Система связанных контуров, в которой меняется  $x_2$ , используется при измерении частоты тока резонансным методом. Этот метод заключается в следующем: с катушкой индуктивности, в которой протекает ток измеряемой частоты, индуктивно связывается последовательный колебательный контур — так называемый волномер. Ток, протекающий в этом контуре, может быть измерен с помощью термопары с гальванометром (рис. 9.16). Изменяя емкость переменного конденсатора контура, т. е.  $x_2$ , добиваются максимального показания гальванометра. Это будет

при втором частичном резонансе. Если связь между контурами достаточно мала, то можно пренебречь вносимым реактивным сопротивлением  $x'_2$  и считать, что максимум наступит при  $x_2 = 0$ . Зная индуктивность и емкость контура, нетрудно определить частоту, при которой это имеет место, т. е. частоту измеряемого тока.

При сильной связи вносимое реактивное сопротивление будет смещать положение максимума, а вносимое активное сопротивление будет расширять полосу пропускания контура, что приведет к уменьшению точности определения положения максимума.

Точность измерения частоты с помощью волномера достигает 0,1 %.

Изменение  $Y_{1э}$  и тока первого контура  $I_1$  в зависимости от  $\xi_2$  мы исследовать не будем. Отметим только, что в этом случае токи  $I_1$  и  $I_2$  будут меняться неодинаково, поскольку соотношение между этими токами будет зависеть от величины  $Z_2$  [см. ф-лу (9.2)] и, следовательно, будет меняться с изменением  $\xi_2$ .

### § 9.7. Резонансные явления в связанных контурах при изменении $x_1$ и $x_2$

В предыдущих параграфах рассматривалась зависимость взаимной проводимости  $Y_{12}$  порознь от  $\xi_1$  и от  $\xi_2$ . Обобщим полученные ранее результаты, рассмотрев  $Y_{12}$  как функцию двух переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Для этого запишем выражение взаимной проводимости в несколько иной по сравнению с употреблявшейся ранее форме:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{Z_c}{Z_1 Z_2 - Z_c^2} = \frac{\pm i |x_c|}{r_1(1 + i\xi_1)r_2(1 + i\xi_2) + x_c^2} = \\ &= \frac{\pm i 2AY_{12mm}}{1 + A^2 - \xi_1\xi_2 + i(\xi_1 + \xi_2)} = \\ &= \frac{2AY_{12mm}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1\xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} e^{i(\pm \frac{\pi}{2} - \beta_{12})}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Здесь  $A = \frac{x_c}{\sqrt{r_1 r_2}}$  — так называемый фактор связи,

$$\beta_{12} = \arctg \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 + A^2 - \xi_1\xi_2}. \quad (9.46)$$

Отсюда

$$\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1\xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}. \quad (9.47)$$

Анализ этой формулы проведем графически.

Рассмотрим поверхность, которая получится, если, задавшись величиной  $A$ , построить в прямоугольных координатах зависимость  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Для того, чтобы представить форму этой поверхности, можно для определенного  $A$  построить в прямоугольных координатах  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ряд горизонталей, каждая из которых является геометрическим местом точек, соответствующих одинаковым отношениям  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$ .

Эти линии являются проекциями сечения рассматриваемой поверхности плоскостями, параллельными плоскости  $\xi_1, \xi_2$ .

На рис. 9.17, 9.18, 9.19 и 9.20 изображены семейства этих линий для случаев, когда  $A = 0,5; 1; 2; 4$ . Около каждой горизонтали указано соответствующее ей значение отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$ .

Из рассмотрения рисунков видно, что при  $A = 0,5$  и  $A = 1$  рассматриваемая поверхность имеет вид холма с довольно плоской (особенно при  $A = 1$ ) вершиной и крутыми склонами, которые делаются все более и более пологими при увеличении  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . При  $A = 2$  и  $A = 4$  поверхность имеет вид двух холмов, разделенных седловиной.

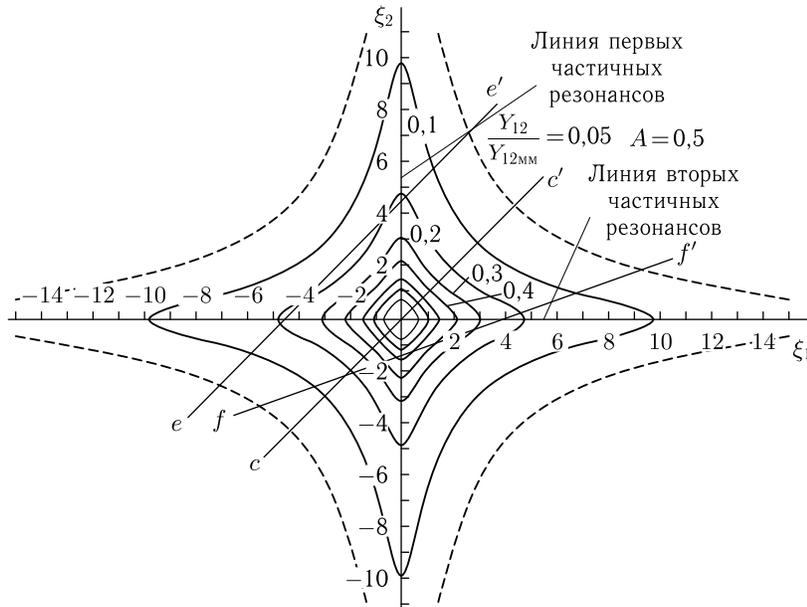


Рис. 9.17. Горизонтالي поверхности, дающей зависимость отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при  $A = 0,5$

Как видно из этих рисунков,  $Y_{12}$  не может достигнуть значения  $Y_{12mm}$  ни при каких  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , если  $A < 1$ .

Причиной этого является то, что при  $A < 1$  связь между контурами настолько слаба, что оптимальный резонанс невозможен ни при каких значениях  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Действительно,

$$r'_1 = r_2 \gamma_2^2,$$

где

$$\gamma_2^2 = \frac{x_c^2}{r_2^2 + x_2^2} \leq \frac{x_c^2}{r_2^2}.$$

Следовательно,

$$r'_1 \leq \frac{x_c^2}{r_2} = r_1 A^2.$$

Таким образом, при  $A < 1$  всегда  $r'_1 < r_1$ , и оптимальный резонанс невозможен.

Как видно из рис. 9.17–9.20, при  $A = 1$  оптимальный резонанс будет в одной точке при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . При  $A > 1$  оптимальный резонанс получается в двух точках.

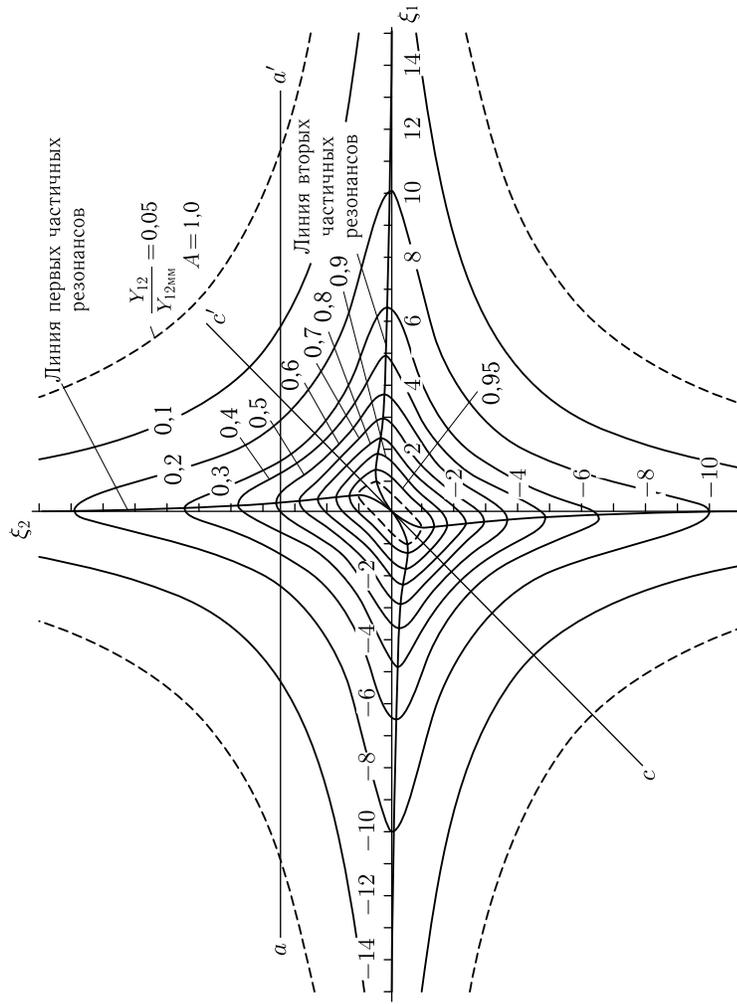


Рис. 9.18. Горизонтали поверхности, дающей зависимость отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при  $A = 1$

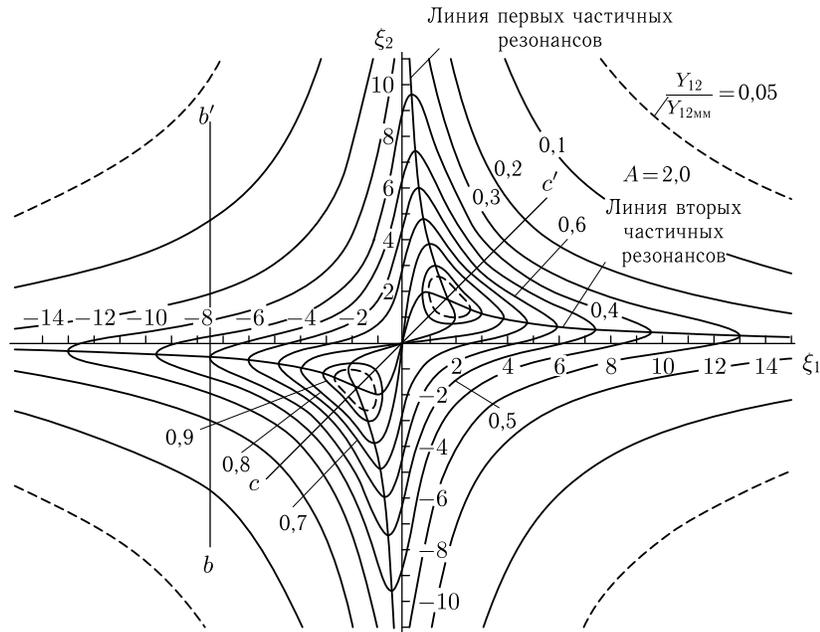


Рис. 9.19. Горизонталы поверхности, дающей зависимость отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при  $A = 2$

Покажем, как с помощью семейств горизонталей рис. 9.17, 9.18, 9.19, 9.20 можно определить зависимость отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  для любого случая.

Предположим, что мы изменяем реактивное сопротивление первого контура  $x_1$ , оставляя неизменными параметры второго контура. Тогда  $\xi_1$  будет переменной величиной, а  $\xi_2$  — постоянной. Пусть  $\xi_2 = +3,5$  и  $A = 1$ . Обратимся к рис. 9.18. Изменению  $\xi_1$  соответствует перемещение по линии  $aa'$ , параллельной оси абсцисс. При движении слева направо, т.е. от отрицательных значений  $\xi_1$  к положительным, пересекаются линии уровня, соответствующие все большим и большим значениям отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$ , что соответствует как бы подъему по склону резонансной кривой. При  $\xi_1$ , несколько большем нуля, достигается максимальное значение  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} \approx 0,51$  (это будет первый частичный резонанс) и затем начинается спуск. Точки, в которых при движении вдоль оси  $\xi_1$  достигаются максимальные значения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$ , т.е. наступает первый частичный резонанс, соединены на рисунках линиями.

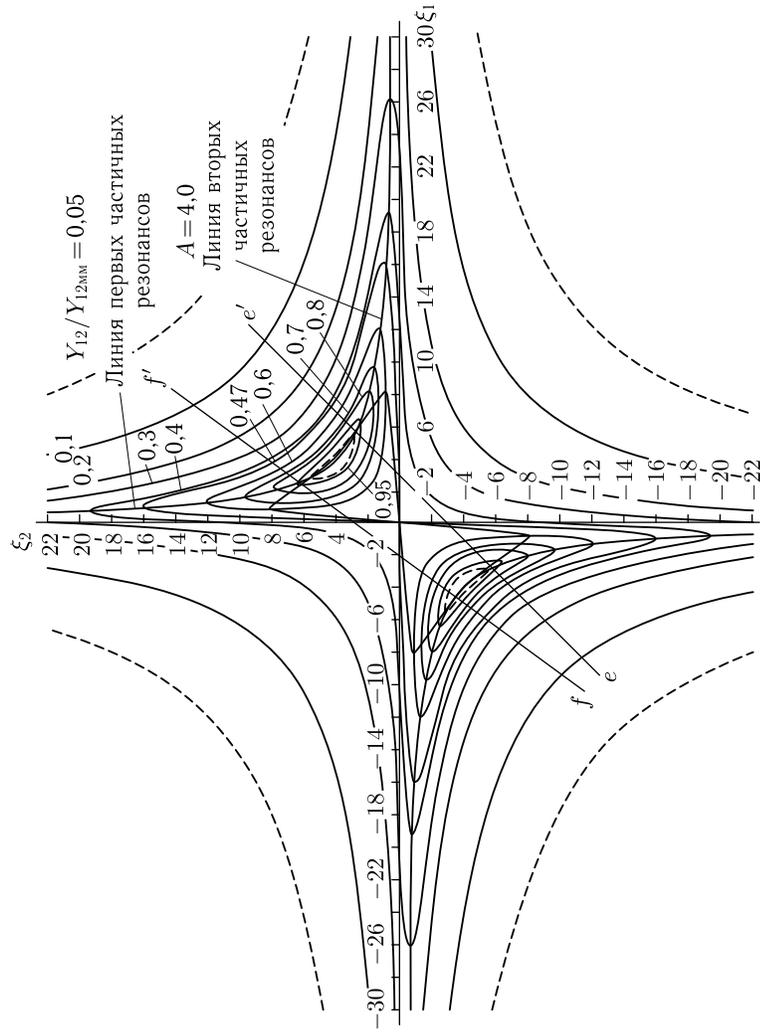


Рис. 9.20. Горизонтали поверхности, дающей зависимость отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при  $A = 4$

Аналогичным способом можно проследить зависимость  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi_2$  при заданных  $\xi_1$  и  $A$ . При этом мы имеем дело с движением по линии, параллельной оси ординат, например по линии  $bb'$  на рис. 9.19, соответствующей  $\xi_1 = 7,4$  и  $A = 2$ . В этом случае максимальное значение  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  наступит при  $\xi_2 = -0,55$  и будет равно 0,5. В этой точке наступит второй частичный резонанс. Точки, в которых будет наступать второй частичный резонанс, на рисунках также соединены линией.

В начале координат ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 0$ ) наступает полный резонанс. В точках, для которых  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = 1$  наступает оптимальный резонанс. Через эти точки проходят линии первого частичного и второго частичного резонансов, т. е. в них существует одновременно по три резонанса.

### § 9.8. Резонансные явления в связанных контурах при изменении частоты эдс (один из контуров неколебательный, а другой колебательный)

Рассмотрим, как будет меняться взаимная проводимость  $Y_{12}$  с изменением частоты эдс, если один из контуров неколебательный, а другой — колебательный.

Предположим вначале, что колебательным является первый контур. Можно считать в этом случае, что при изменении частоты в области, близкой к резонансу, будет изменяться лишь  $\xi_1$ , а  $\xi_2$  будет оставаться примерно постоянным. Это предположение справедливо потому, что полоса частот вблизи резонанса, в которой величина  $Y_{12}$  имеет существенное значение, невелика, и изменения  $x_2$  в этой полосе частот соответственно малы.

На основании сказанного, для определения  $Y_{12}$  можно воспользоваться выражениями § 9.5, положив в них

$$\xi_1 = \frac{x_1}{r_1} = Q_1 \nu_1 \approx Q_1 \frac{2(\omega - \omega_{p1})}{\omega_{p1}},$$

где  $r_1$  и  $x_1$  — активная и реактивная составляющие сопротивления первого контура при разомкнутом втором контуре;  $Q_1$  — добротность первого контура при разомкнутом втором;  $\omega_{p1}$  — резонансная частота первого контура при разомкнутом втором.

Из этого выражения, а также из рис. 9.15 и § 9.5 следует, что  $Y_{12}$  будет меняться с частотой по резонансной кривой последовательного контура. Максимальное значение  $Y_{12}$  наступает на частоте, определяемой уравнением

$$\xi_1 = Q_1 \frac{2(\omega - \omega_{p1})}{\omega_{p1}} = \xi_2 \frac{r_1'}{r_1},$$

откуда частота равна

$$\omega = \omega_{p1} \left( 1 + \frac{\xi_2}{2Q_1} \cdot \frac{r'_1}{r_1} \right). \quad (9.48)$$

Таким образом, она будет тем больше отличаться от  $\omega_{p1}$ , чем больше расстройка второго контура  $\xi_2$ , чем больше связь между контурами, определяемая параметром  $\frac{r'_1}{r_1}$ , и чем меньше добротность первого контура  $Q_1$ .

Ширина резонансной кривой будет определяться уравнением

$$2\Delta\xi_1 = \xi''_1 - \xi'_1 = Q_1 \frac{2(\omega'' - \omega_{p1})}{\omega_{p1}} - Q_1 \frac{2(\omega' - \omega_{p1})}{\omega_{p1}} = 2 \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right),$$

где  $\xi''_1$  и  $\xi'_1$  — значения на границах полосы пропускания, а  $\omega''$  и  $\omega'$  — соответствующие им частоты. Из этого равенства следует, что

$$2\Delta\omega = \omega'' - \omega' = \frac{\omega_{p1}}{Q_1} \left( 1 + \frac{r'_1}{r_1} \right) = \frac{\omega_{p1}}{Q_{1э}}, \quad (9.49)$$

где  $Q_{1э}$  — эквивалентная добротность первого контура с учетом связи:

$$Q_{1э} = \frac{Q_1}{1 + \frac{r'_1}{r_1}}. \quad (9.50)$$

Как видно из ф-лы (9.49), с увеличением  $\frac{r'_1}{r_1}$ , т. е. с увеличением связи между контурами, ширина полосы пропускания растет.

Рост ширины полосы и уменьшение  $Q_{1э}$  при увеличении связи можно объяснить увеличением активного сопротивления в схеме замещения первого контура за счет вносимого активного сопротивления.

Максимальное значение проводимости  $Y_{12м.м}$  с увеличением  $\frac{r'_1}{r_1}$  (т. е. с увеличением связи), вначале увеличивается, достигает наибольшей величины при  $\frac{r'_1}{r_1} = 1$  и затем уменьшается.

Фазовая характеристика в этом случае будет также соответствовать фазовой характеристике последовательного колебательного контура, имеющего добротность  $Q_{1э}$ , если добавить к ней в соответствии с § 9.5 постоянную величину  $\pm \frac{\pi}{2} - \beta_2$ , где  $\beta_2 = \text{arctg } \xi_2$ .

Если колебательным является второй контур, а первый неколебательный, то мы будем считать меняющимся лишь  $x_2$ .

Этот случай сведется к случаю, рассмотренному в § 9.6. Поскольку, как было показано,  $\mathbf{Y}_{12}$  зависит от  $x_1$  и  $x_2$  одинаково, все сказанное выше для случая, когда колебательным являлся первый контур, будет справедливо и здесь, нужно лишь во всех приведенных в этом параграфе формулах сменить индексы 1 на 2 и 2 на 1.

Укажем еще, что величину связи между контурами обычно берут не слишком большой, чтобы не увеличивать значительно полосы пропускания, и не слишком малой, чтобы не снижать максимального значения взаимной проводимости. Значение  $\frac{r'_1}{r_1}$  (или  $\frac{r'_2}{r_2}$ ), равное 0,25, позволяет получить удовлетворительное компромиссное решение. В этом случае полоса пропускания на 25 % больше полосы пропускания одиночного колебательного контура, а максимальное значение  $Y_{12}$  составляет 80 % от  $Y_{12,mm}$ .

**Пример 9.4.** Схема, изображенная на рис. 9.21, имеет следующие данные:

$$L_1 = L_2 = 1 \text{ мГн}, \quad C = 1000 \text{ пФ}, \quad r_1 = 9000 \text{ Ом}, \quad r_2 = 10 \text{ Ом}.$$

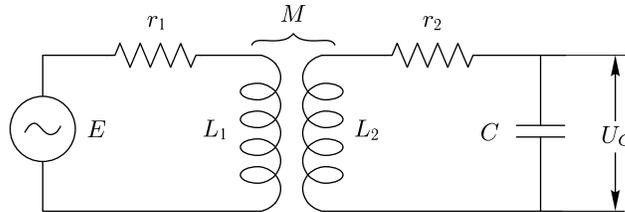


Рис. 9.21. Схема к примеру 9.4

Требуется: найти взаимную индуктивность  $M_0$ , при которой коэффициент усиления схемы  $K = \frac{U_C}{E}$  будет максимальным ( $U_C$  — эффективное значение напряжения на конденсаторе  $C$ ), величину коэффициента усиления и полосу пропускания, получающуюся при этом.

Решение. 1. Резонансная частота второго контура равна

$$\omega_{p2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \text{ 1/с}.$$

2. Добротность второго контура равна

$$Q_2 = \frac{\omega_{p2} L_2}{r_2} = \frac{10^6 \cdot 10^{-3}}{10} = 100.$$

3. Примем  $x_1$  и  $\xi_1$  постоянными и равными их значениям на частоте  $\omega_{p2}$ , поскольку резонансная кривая расположена вблизи этой частоты.

Получим

$$x_1 = \omega_{p2} L_1 = 10^6 \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ Ом},$$

$$\xi_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{1000}{9000} = 0,111.$$

4. Найдем частоту оптимального резонанса, при которой ток во втором контуре и коэффициент передачи  $K = \frac{U_C}{E}$  будут максимальными:

$$\omega = \omega_{p2} \left( 1 + \frac{\xi_1 \frac{r'_2}{r_2}}{2Q_2} \right) = 10^6 \left( 1 + \frac{0,111 \cdot 1}{2 \cdot 100} \right) = 1,00055 \cdot 10^6 \text{ 1/с}.$$

Как видим, эта частота будет отличаться всего лишь на 0,055 % от  $\omega_{p2}$ . Здесь было принято  $\frac{r'_2}{r_2} = 1$ , поскольку расчет велся для оптимального резонанса.

5. Найдем  $x_c$  из равенства

$$r'_2 = \gamma_1^2 r_1 = \frac{x_c^2}{r_1^2 + x_1^2} \cdot r_1 = r_2,$$

поскольку расчет ведется для оптимального резонанса.

Получим

$$x_c = \sqrt{\frac{r_2}{r_1} (r_1^2 + x_1^2)} = \sqrt{\frac{10}{9000} (9^2 \cdot 10^6 + 10^6)} = 302 \text{ Ом.}$$

6. Находим  $M_0$  из равенства

$$x_c = \omega M_0 \approx \omega_{p2} M_0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{x_c}{\omega_{p2}} = \frac{302}{10^6} = 302 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 302 \text{ мкГн.}$$

7. Найдем  $K$ . Напряжение на конденсаторе равно:

$$U_C = E Y_{12\text{мм}} \frac{1}{\omega C} = \frac{E}{2\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\omega C},$$

откуда

$$\begin{aligned} K &= \frac{U_C}{E} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\omega C} \approx \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{1}{\omega_{p2} C} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{9000 \cdot 10}} \cdot \frac{1}{10^6 \cdot 1000 \cdot 10^{-12}} = 1,67. \end{aligned}$$

8. Полоса пропускания равна

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_{p2}}{Q_2} \left(1 + \frac{r'_2}{r_2}\right) = \frac{10^6}{100} (1 + 1) = 20\,000 \text{ 1/с,}$$

или

$$2\Delta f = \frac{2\Delta\omega}{2\pi} = \frac{20\,000}{6,28} = 3200 \text{ Гц.}$$

### § 9.9. Резонансные явления в связанных колебательных контурах при изменении частоты эдс (контуры без потерь)

В этом и последующих параграфах мы рассмотрим, как будет изменяться  $Y_{12}$  при изменении частоты эдс  $\omega$ , если оба контура колебательные.

При изменении частоты  $\omega$  происходит одновременное изменение реактивного сопротивления обоих контуров и сопротивления связи, что сильно усложняет исследование.

Взаимная проводимость [см. ф-лу (9.38)] равна

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{Z_c}{Z_1 Z_1 - Z_c^2} = \frac{i x_c}{(r_1 + i x_1)(r_2 + i x_2) + x_c^2} = \\ &= \frac{i x_c}{r_1 r_2 - x_1 x_2 + x_c^2 + i(r_1 x_2 + r_2 x_1)}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Для первого приближенного исследования мы будем считать, что контуры не имеют потерь, т. е. положим, что

$$r_1 = r_2 = 0.$$

При этом

$$\mathbf{Y}_{12} \approx \frac{ix_c}{-x_1x_2 + x_c^2}. \quad (9.52)$$

Такое допущение не приведет к существенным ошибкам, если

$$|-x_1x_2 + x_c^2| \gg |r_1x_2 + r_2x_1|$$

и

$$|-x_1x_2 + x_c^2| \gg r_1r_2.$$

Можно ожидать, что эти условия будут удовлетворяться в широком диапазоне частот, поскольку для нормальных контуров

$$|x_1| \gg r_1$$

и

$$|x_2| \gg r_2,$$

за исключением областей частот вблизи резонансов.

Исследуем графически, как будет изменяться модуль дроби (9.52) с частотой. Для колебательных контуров:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \nu_1; & \nu_1 &= \frac{\omega}{\omega_{p1}} - \frac{\omega_{p1}}{\omega}; \\ x_2 &= \rho_2 \nu_2; & \nu_2 &= \frac{\omega}{\omega_{p2}} - \frac{\omega_{p2}}{\omega}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_{p1}$  — резонансная частота первого контура,  $\omega_{p2}$  — резонансная частота второго контура.

На рис. 9.22а изображены кривые зависимости  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_1x_2$  от  $\omega$ , причем условно принято, что  $\omega_{p1} < \omega_{p2}$ .

Если  $\omega_{p1} > \omega_{p2}$ , то характер зависимости окажется тот же, только индексы 1 и 2 поменяются местами.

На рис. 9.23а приведены кривые зависимости  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_1x_2$  от  $\omega$  для случая, когда  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ .

Предположим вначале, что связь индуктивная или автотрансформаторная, т. е. что

$$x_c = \omega M$$

или

$$x_c = \omega L_c.$$

Тогда зависимость  $x_c^2$  от частоты будет квадратичная. Она также изображена на рис. 9.22а и 9.23а. На рис. 9.22б и 9.23б изображены кривые зависимости знаменателя ф-лы (9.52) от частоты для случаев, когда  $\omega_{p1} < \omega_{p2}$  и  $\omega_{p1} = \omega_{p2}$ . (Для компактности рисунков знаменатель отложен с обратным знаком.)

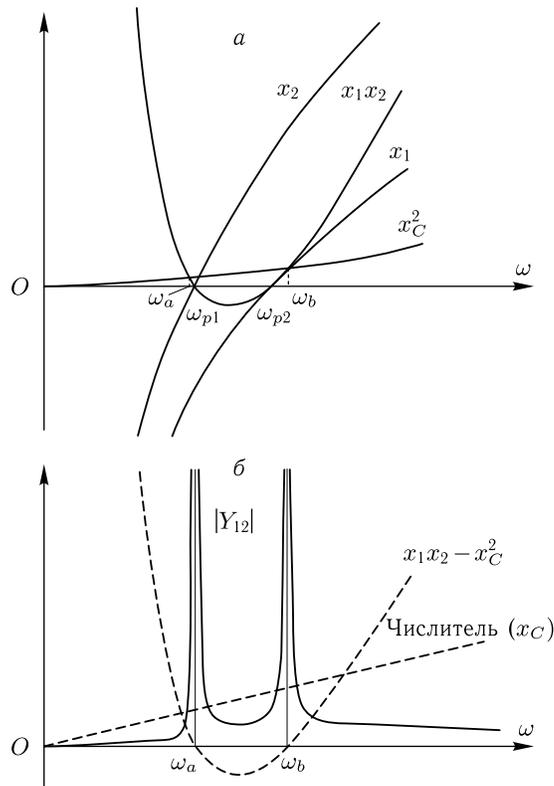


Рис. 9.22. Зависимость составляющих ф-лы (9.52) и модуля взаимной проводимости от частоты при индуктивной связи и разных резонансных частотах контуров;  $\omega_a$  и  $\omega_b$  — частоты связи

Из рисунков видно, что знаменатель обращается в нуль на частотах  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , для которых  $x_C^2 = x_1x_2$ . Эти частоты называются частотами связи. Даже в том случае, когда резонансные частоты обоих контуров равны, существуют две частоты связи. Как видно из рис. 9.22 и 9.23, одна из этих частот всегда меньше обеих резонансных частот контуров, а другая всегда больше. Чем меньше связь между контурами, тем меньше  $x_C^2$  и тем ближе частоты связи к резонансным частотам контуров. Теперь нетрудно построить зависимость взаимной проводимости от частоты. На рис. 9.22б и 9.23б пунктиром построены кривые зависимости числителя и знаменателя ф-лы (9.52) от частоты для случая индуктивной или автотрансформаторной связи, а сплошной линией — кривые зависимости модуля взаимной проводимости от  $\omega$ . На частотах связи взаимная проводимость обращается в бесконечность. В реальных контурах это не будет иметь места, поскольку знаменатель ф-лы (9.51) не будет равен нулю из-за наличия сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$ .

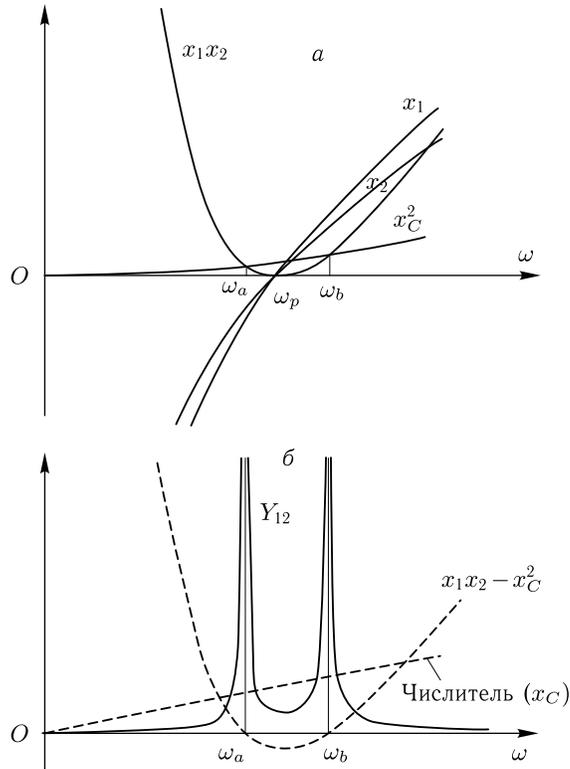


Рис. 9.23. Зависимость составляющих ф-лы (9.52) и модуля взаимной проводимости от частоты при индуктивной связи и одинаковых резонансных частотах контуров;  $\omega_a$  и  $\omega_b$  — частоты связи

Для емкостной связи, когда

$$x_c = -\frac{1}{\omega C_c}$$

зависимости будут аналогичными.

На рис. 9.24а изображены значения  $x_1x_2$  и  $x_C^2$ , а на рис. 9.24б — значения числителя и знаменателя ф-лы (9.52) и  $Y_{12}$  для случая емкостной связи. Аналогичные зависимости будут иметь место и при комбинированной связи.

На основании рассмотренного можно сделать следующие выводы:

Если в системе двух связанных колебательных контуров  $r_1$  и  $r_2$  равны нулю, то  $Y_{12}$  обращается в бесконечность на двух частотах, называемых частотами связи. Одна из этих частот всегда меньше обеих резонансных частот отдельных контуров, а другая всегда больше. Если  $x_c \rightarrow 0$ , частоты связи стремятся к резонансным частотам контуров.

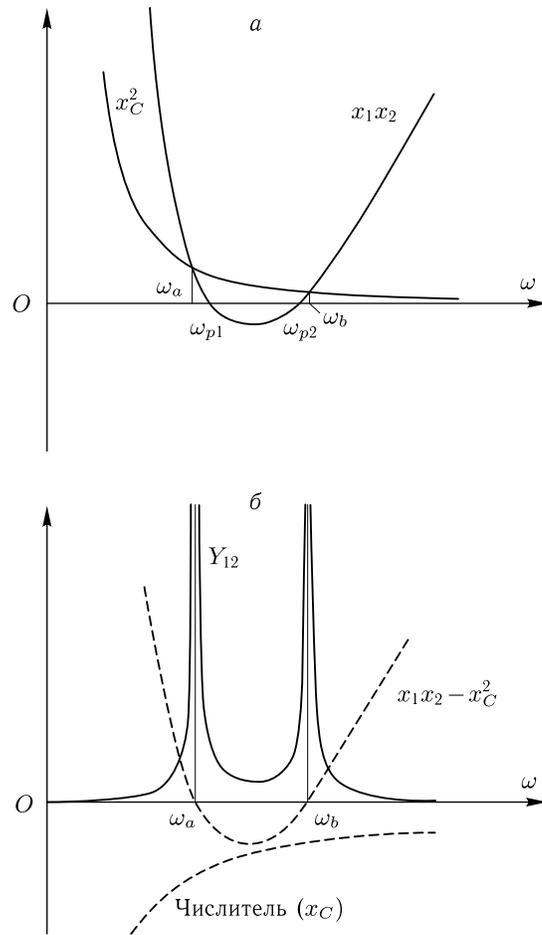


Рис. 9.24. Зависимость составляющих ф-лы (9.52) и модуля взаимной проводимости от частоты при емкостной связи и разных резонансных частотах контуров;  $\omega_a$  и  $\omega_b$  — частоты связи

Найдем математическое выражение для частот связи. Для этого найдем корни уравнения

$$x_c^2 - x_1 x_2 = 0.$$

В частном случае

$$x_c = \omega L_c,$$

и уравнение запишется так:

$$(\omega L_c)^2 - \rho_1 \nu_1 \rho_2 \nu_2 = 0.$$

Проводя дальнейшие преобразования, будем иметь

$$\omega^2 L_c^2 - \omega_{p1} L_1 \omega_{p2} L_2 \left( \frac{\omega}{\omega_{p1}} - \frac{\omega_{p1}}{\omega} \right) \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_{p2}} - \frac{\omega_{p2}}{\omega} \right) = 0.$$

Здесь  $L_1$  и  $L_2$  соответственно индуктивности первого и второго контуров.

Разделив уравнение на  $L_1 L_2$ , получим

$$\omega^2 k_L^2 - \omega_{p1} \omega_{p2} \left( \frac{\omega}{\omega_{p1}} - \frac{\omega_{p1}}{\omega} \right) \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_{p2}} - \frac{\omega_{p2}}{\omega} \right) = 0,$$

где

$$k_L = \frac{L_c}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (9.53)$$

Величина  $k_L$  называется коэффициентом индуктивной связи.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, придем к биквадратному уравнению

$$\omega^4 (1 - k_L^2) - \omega^2 (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) + \omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$\omega_{a,b}^2 = \frac{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2 \mp \sqrt{(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)^2 - 4\omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2 (1 - k_L^2)}}{2(1 - k_L^2)}. \quad (9.54)$$

Если резонансные частоты обоих контуров одинаковы, т. е.

$$\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p,$$

то

$$\omega_{a,b} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 \pm k_L}}. \quad (9.55)$$

Отрицательные корни мы отбрасываем.

Величина  $k_L$  не может быть больше 1, поскольку всегда

$$L_1 \geq L_c \quad \text{и} \quad L_2 \geq L_c.$$

Из ф-лы (9.54) следует, что при  $k_L \rightarrow 1$

$$\omega_a^2 \rightarrow \frac{\omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2}{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2}$$

и

$$\omega_b \rightarrow \infty.$$

При  $k_L \rightarrow 0$ , как мы уже установили раньше,  $\omega_a$  и  $\omega_b$  стремятся к резонансным частотам контуров.

В случае трансформаторной связи  $x_c = \omega M$ , и мы получим те же соотношения, только в них следует положить

$$k_L = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (9.56)$$

Для емкостной связи

$$x_c = -\frac{1}{\omega C_c}.$$

В этом случае, рассуждая аналогично предыдущему, мы получим для частот связи следующее выражение

$$\omega_{a,b}^2 = \frac{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)^2}{4} - \omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2 (1 - k_C^2)}. \quad (9.57)$$

Здесь обозначено

$$k_C = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_c}. \quad (9.58)$$

При контурах, для которых  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ , получим

$$\omega_{a,b} = \omega_p \sqrt{1 \mp k_C}. \quad (9.59)$$

Если  $k_C \rightarrow 0$ , то, как было установлено раньше, частоты связи будут стремиться к резонансным частотам контура.

Если  $k_C \rightarrow 1$  ( $k_C$  не может быть больше единицы), то  $\omega_a \rightarrow 0$ , а  $\omega_b^2 \rightarrow (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)$ .

Введенные здесь величины  $k_L$  и  $k_C$ , названные коэффициентами связи, можно в общем виде выразить так:

$$k = k_L = k_C = \frac{x_c}{\sqrt{x_{\kappa 1} x_{\kappa 2}}}, \quad (9.60)$$

где  $x_{\kappa 1}$  и  $x_{\kappa 2}$  — полные, одноименные с  $x_c$  реактивные составляющие сопротивления первого и второго контуров (т.е. индуктивные сопротивления при связи индуктивного характера и емкостные при связи емкостного характера).

В справедливости этой формулы легко убедиться, сличая ее с ф-лами (9.53), (9.56) и (9.58).

Для комбинированной связи можно провести аналогичное исследование.

### § 9.10. Резонансные явления в связанных колебательных контурах при изменении частоты ЭДС (слабая связь и сильно отличающиеся резонансные частоты)

Рассмотрим, как будет меняться взаимная проводимость  $Y_{12}$  с изменением частоты ЭДС, если связь между контурами слабая и резонансные частоты контуров сильно отличаются друг от друга.

Прежде всего заметим, что при слабой связи изменение вносимого сопротивления с частотой в области частот, близких к резонансным частотам контуров, ничтожно, а частоты связи примерно равны резонансным частотам контуров.

На этих частотах нельзя пренебрегать активными сопротивлениями, но можно считать, что в узкой области частот, близких к  $\omega_{p1}$ , реактивное сопротивление второго контура, поскольку его резонансная частота сильно отличается от  $\omega_{p1}$ , примерно постоянно и равно  $x_{2p1}$ , а в области частот, близких к  $\omega_{p2}$ , реактивное сопротивление первого контура примерно постоянно и равно  $x_{1p2}$ .

Таким образом, мы будем считать, что в области частот, близких к  $\omega_{p1}$ :

$$\xi_1 = Q_1 \frac{2(\omega - \omega_{p1})}{\omega_{p1}} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{x_{2p1}}{r_2} = \text{const},$$

а в области частот, близких к  $\omega_{p2}$ :

$$\xi_2 = Q_2 \frac{2(\omega - \omega_{p2})}{\omega_{p2}},$$

$$\xi_1 = \frac{x_{1p2}}{r_1} = \text{const}.$$

В этих случаях исследование и его результаты будут полностью идентичны с § 9.8, и мы получим две резонансные кривые, сходные с резонансными кривыми одиночного контура. Одна из этих кривых будет в области, близкой к  $\omega_{p1}$ , а другая в области, близкой к  $\omega_{p2}$ .

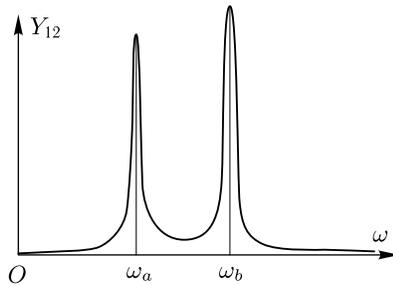


Рис. 9.25. Зависимость модуля взаимной проводимости от частоты, построенная с учетом активных сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$

Для остальной области частот можно принять  $r_1 = r_2 = 0$ .

На рис. 9.25 приведена зависимость  $Y_{12}$  от  $\omega$  для случая, когда  $r_1$  и  $r_2$  не равны нулю.

### § 9.11. Резонансные явления в связанных колебательных контурах при изменении частоты эдс (контуры одинаковые)

В практике часто встречается случай, когда первый и второй контуры имеют одну и ту же резонансную частоту и одну и ту же добротность (заметим, что это может иметь место и при разных контурах, если  $L_1C_1 = L_2C_2$  и  $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$ ).

В данном параграфе мы рассмотрим этот случай.

Если

$$\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$$

и

$$Q_1 = Q_2 = Q,$$

то

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi,$$

и ф-ла (9.47) принимает следующий вид:

$$\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (9.61)$$

Для анализа этой формулы исследуем квадрат ее знаменателя, обозначив его через  $B^2$ :

$$B^2 = \xi^4 + 2(1 - A^2)\xi^2 + (1 + A^2)^2. \quad (9.62)$$

Зависимость  $B^2$  от  $\xi$  будет симметрична относительно оси ординат, поскольку в уравнение входят четные степени  $\xi$ .

Найдем производную  $\frac{d(B^2)}{d\xi}$  и, приравняв ее нулю, определим точки экстремумов

$$\frac{d(B^2)}{d\xi} = 4\xi^3 + 4\xi(1 - A^2) = 0.$$

Первый корень этого уравнения

$$\xi = 0,$$

второй и третий

$$\xi = \pm\sqrt{A^2 - 1}.$$

Второй и третий корни существуют при  $A > 1$ .

Нетрудно показать, что при  $\xi = 0$

$$B^2 = (1 + A^2)^2,$$

а при

$$\xi = \pm\sqrt{A^2 - 1},$$

$$B^2 = 4A^2.$$

Таким образом, при  $A \leq 1$ , с изменением  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$   $B^2$  будет меняться от  $+\infty$  до минимального значения, при  $\xi = 0$  равного  $(1 + A^2)^2$ , и затем симметрично до  $+\infty$ . При  $A > 1$   $B^2$  будет меняться от  $+\infty$  до первого экстремума при  $\xi = -\sqrt{A^2 - 1}$ , где  $B^2 = 4A^2$ . Затем  $B^2$  будет увеличиваться, принимая значение  $(1 + A^2)^2$  при следующем экстремуме, наступающем при  $\xi = 0$ . Отметим, что при  $A > 1$  всегда  $(1 + A^2)^2 > 4A^2$ . Затем  $B^2$  будет меняться симметрично, уменьшаясь до значения  $4A^2$  при  $\xi = +\sqrt{A^2 - 1}$  и дальше, увеличиваясь до  $+\infty$ .

На рис. 9.26а и 9.27а изображена зависимость  $B^2$  от  $\xi$  для  $A \leq 1$  и для  $A > 1$ . При  $A \leq 1$   $B^2$  будет иметь один минимум, а при  $A > 1$  — два.

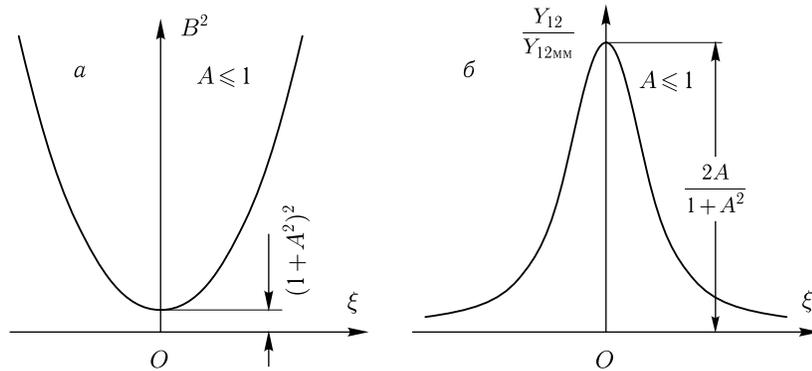


Рис. 9.26. Характер зависимости знаменателя ф-лы (9.61) и отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от обобщенной расстройки  $\xi$  для  $A \leq 1$

Мы будем считать, что в области, близкой к резонансу,  $x_c$  и  $A$  мало меняются с изменением частоты. В этом случае  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  будет меняться с частотой обратно пропорционально величине  $B$ .

На рис. 9.26б изображена зависимость  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi$  для  $A \leq 1$  и на рис. 9.27б для  $A > 1$ . Экстремальные значения указаны на этих рисунках. Зависимость  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi$ , т. е. от частоты, будет односторонней при факторе связи меньшем или равном единице и двусторонней при  $A > 1$ .

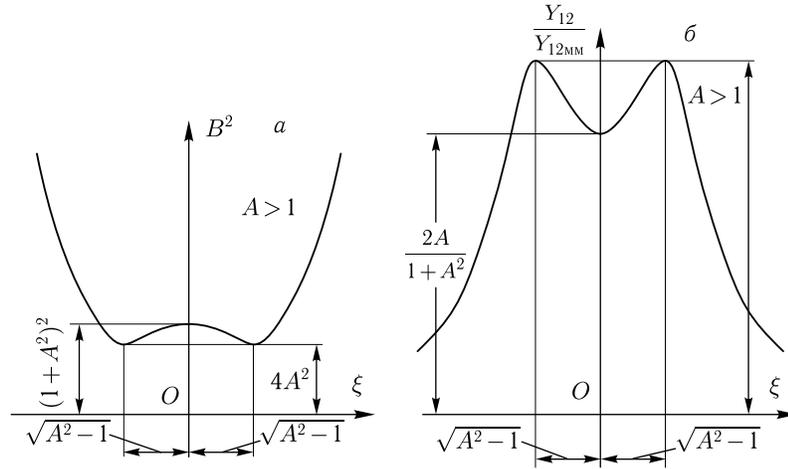


Рис. 9.27. Характер зависимости знаменателя ф-лы (9.61) и отношения  $Y_{12}/Y_{12mm}$  от обобщенной расстройки  $\xi$  для  $A > 1$

При  $A \geq 1$  максимальные значения  $Y_{12}$  равны  $Y_{12mm}$ , т.е. значениям взаимной проводимости при оптимальном резонансе.

На рис. 9.28 приведены зависимости отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  от  $\xi$  для разных значений фактора связи.

Двугорбые резонансные кривые, получающиеся при  $A > 1$ , характерны тем, что все максимальные значения отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  одинаковы и равны единице. Чем больше фактор связи  $A$ , тем больше значения  $\xi$ , при которых наступает максимум, и тем меньше значение взаимной проводимости на резонансной частоте (при  $\xi = 0$ ).

По сравнению с резонансной кривой одиночного контура (она изображена на рис. 9.28 пунктиром) резонансные кривые связанных контуров при факторе связи, близком к единице, обладают более равномерной зависимостью взаимной проводимости от  $\xi$  в полосе пропускания, что уменьшает искажения при прохождении через связанные контуры модулированных колебаний. За границами полосы пропускания взаимная проводимость уменьшается более резко, чем проводимость одиночного контура. Это способствует лучшему выделению принимаемой станции.

Однако максимальная взаимная проводимость  $Y_{12mm}$  связанных контуров меньше максимальной проводимости одиночного контура. Действительно,

$$Y_{12mm} = \frac{1}{2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

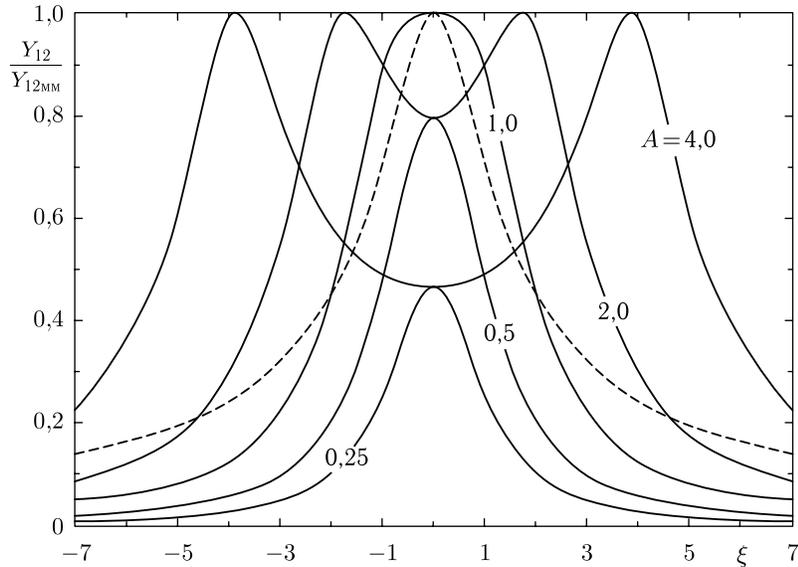


Рис. 9.28. Семейство резонансных кривых двух связанных одинаковых контуров. Пунктиром изображена резонансная кривая последовательного контура

Если  $r_1 = r_2 = r$ , то  $Y_{12mm} = \frac{1}{2r}$ . Максимальная же проводимость одиночного контура  $Y_p = \frac{1}{r}$ .

Поэтому при одной и той же величине эдс ток во втором контуре системы связанных контуров меньше тока, протекающего в одиночном последовательном контуре.

Фазовая характеристика для взаимной проводимости системы двух связанных контуров определится из ф-лы (9.45). Для рассматриваемого случая, когда  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , эта характеристика определится формулой

$$\pm \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \pm \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\xi}{1 + A^2 - \xi^2}.$$

Зависимость  $\beta_{12}$  от  $\xi$  для ряда значений  $A$  дана на рис. 9.29. Как видно из этого рисунка, при  $A = 1$  фазовая характеристика в широком диапазоне (от  $\xi = -1,5$  до  $\xi = +1,5$ ) почти линейна. В § 6.13 было показано, что такая линейная фазовая характеристика не дает искажений. При  $A = 0,5; 2$  и  $4$  фазовая характеристика менее линейна. На этом рисунке пунктиром показана для сравнения фазовая характеристика последовательного колебательного контура.

**Пример 9.5.** Известны следующие данные системы связанных контуров, изображенной на рис. 9.1 а:  $C_1 = C_2 = 120$  пФ,  $f_{p1} = f_{p2} = \frac{\omega_{p1}}{2\pi} = \frac{\omega_{p2}}{2\pi} = f_p = = 465$  кГц;  $L_1 = L_2 = L$ ;  $Q_1 = Q_2 = Q$ .

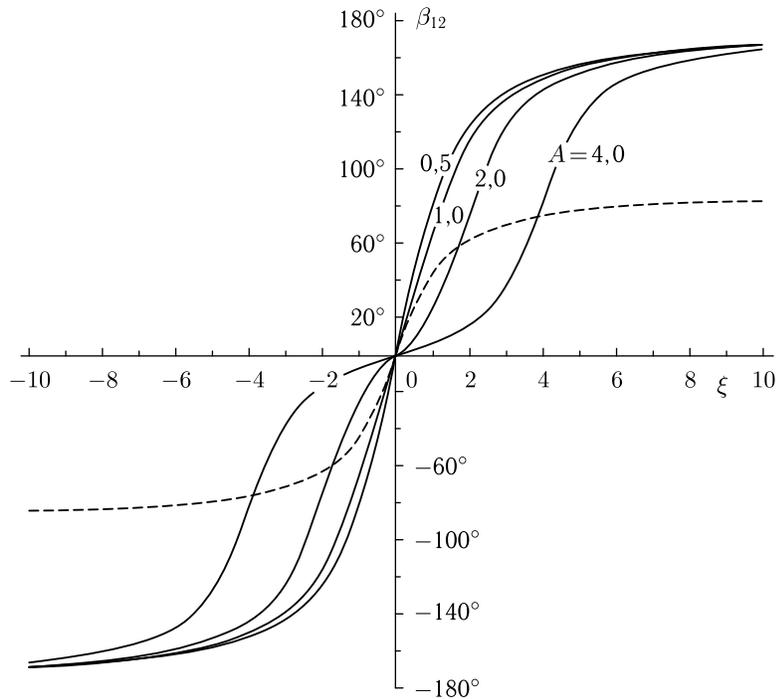


Рис. 9.29. Семейство фазовых характеристик двух связанных одинаковых контуров. Пунктиром изображена фазовая характеристика последовательного контура

Требуется найти  $L$ ,  $M$  и  $Q$ , необходимые для того, чтобы взаимная проводимость на несущей и крайних боковых частотах амплитудно-модулированной эдс, включенной в первый контур, отличалась в  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  раза от  $Y_{12mm}$ . Несущая частота равна резонансной. Максимальная частота модуляции равна 6 кГц.

Решение. 1. Определяем индуктивность

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_p^2 C} = \frac{1}{39,5 \cdot 465^2 \cdot 10^6 \cdot 120 \cdot 10^{-12}} = 0,975 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 0,975 \text{ мГн.}$$

2. Определяем фактор связи  $A$  из условия:

$$\frac{Y_{12p}}{Y_{12mm}} = \frac{2A}{1 + A^2} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

откуда  $A = 2,415$ .

3. Находим обобщенную расстройку  $\xi$  на крайних боковых частотах из условия:

$$\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда  $\xi = \pm 3,1$ .

4. Определяем добротность  $Q$ .

По условию на крайней боковой частоте, для которой  $f - f_p = 6000$  Гц,

$$\xi = Q \frac{2(f - f_p)}{f_p} = 3,1,$$

откуда

$$Q = \frac{3f_p}{2(f - f_p)} = \frac{3,1 \cdot 465 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 10^3} = 120.$$

5. Находим  $r$  из формулы  $Q = \frac{\omega_p L}{r}$ :

$$r = \frac{\omega_p L}{Q} = \frac{6,28 \cdot 465 \cdot 10^3 \cdot 0,975 \cdot 10^{-3}}{120} = 23,8 \text{ Ом.}$$

6. Определяем  $x_c$  из формулы  $A = \frac{x_c}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{x_c}{r}$ :

$$x_c = Ar = 2,415 \cdot 23,8 = 57,3 \text{ Ом.}$$

7. Определяем  $M$ :

$$x_c \approx \omega_p M,$$

откуда

$$M \approx \frac{x_c}{\omega_p} = \frac{57,3}{6,28 \cdot 465 \cdot 10^3} = 19,6 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 19,6 \text{ мкГн.}$$

### § 9.12. Резонансные явления в связанных контурах при изменении частоты эдс (общий случай при близких частотах связи)

В этом параграфе мы рассмотрим зависимость  $Y_{12}$  от  $\omega$  при любых контурах в области частот, охватывающей резонансные частоты  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$ . При этом мы будем полагать эту область настолько узкой, что в ней можно считать приближенно  $x_c = \text{const}$  и применять для расстроек приближенные формулы. При этих условиях  $\xi_1$  и  $\xi_2$  будут меняться с изменением  $\omega$  в соответствии с формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= Q_1 \frac{2(\omega - \omega_{p1})}{\omega_{p1}} \\ \xi_2 &= Q_2 \frac{2(\omega - \omega_{p2})}{\omega_{p2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

а величина  $A = \frac{x_c}{\sqrt{r_1 r_2}}$  будет постоянной.

Исследование мы проведем, пользуясь зависимостью  $Y_{12}$  от  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , даваемой ф-лой (9.47), и построенными по ней рис. 9.17, 9.18, 9.19 и 9.20.

С увеличением  $\omega$   $\xi_1$  и  $\xi_2$  будут расти. Исключив из равенств (9.63) частоту  $\omega$ , получим

$$\xi_2 = \frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \xi_1 + Q_2 \frac{2(\omega_{p1} - \omega_{p2})}{\omega_{p2}}. \quad (9.64)$$

Это — уравнение прямой на плоскости  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Величина  $\frac{\omega_{p1}}{\omega_{p2}} \cdot \frac{Q_2}{Q_1}$  равна тангенсу угла наклона прямой к оси  $\xi_1$ ; второй член уравнения показывает, насколько прямая сдвинута от начала координат в вертикальном направлении.

По этой прямой будет двигаться точка при изменении  $\omega$ .

Рассмотрим сначала случай, исследованный уже раньше, когда

$$Q_1 = Q_2$$

и

$$\omega_{p1} = \omega_{p2}.$$

При этом  $\xi_1 = \xi_2$  и точка будет двигаться по прямой, проходящей через начало координат и идущей под углом  $45^\circ$  к осям (прямые  $cc'$  на рис. 9.17, 9.18 и 9.19). В этом случае при  $A \leq 1$  (рис. 9.17 и 9.18) с увеличением  $\omega$  мы, двигаясь по прямой слева направо, будем получать сначала увеличение  $Y_{12}$ , затем при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  наступит максимум и дальше  $Y_{12}$  будет уменьшаться. Это даст одностороннюю кривую изменения  $Y_{12}$  от  $\omega$ . Если  $A > 1$  (рис. 9.19 или 9.20), то при движении по той же прямой мы получим двугорбую кривую.

Пусть далее:

$$\omega_{p1} = \omega_{p2},$$

$$Q_1 \neq Q_2.$$

Уравнение прямой тогда запишется так:

$$\xi_2 = \frac{Q_2}{Q_1} \xi_1.$$

В данном случае прямая пройдет через начало координат под углом, отличным от  $45^\circ$ . Если фактор связи  $A$  меньше или равен единице, то резонансные кривые будут односторонними. Если  $A > 1$ , то кривые будут двугорбыми, симметричными, но максимальное значение отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  будет обязательно меньше единицы, поскольку прямая не пройдет через вершины «холмов».

Пусть:

$$\omega_{p1} \neq \omega_{p2},$$

$$\frac{Q_2}{\omega_{p2}} = \frac{Q_1}{\omega_{p1}}.$$

Уравнение прямой тогда запишется следующим образом:

$$\xi_2 = \xi_1 + Q_2 \frac{2(\omega_{p1} - \omega_{p2})}{\omega_{p2}}.$$

Эта прямая проходит под углом  $45^\circ$  выше начала координат (если  $\omega_{p1} > \omega_{p2}$ ) или ниже (если  $\omega_{p1} < \omega_{p2}$ ).

В этом случае резонансные кривые будут также симметричными, но максимальные значения отношения  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}}$  всегда будут меньше 1 (это можно проследить, например, по прямым  $ee'$  на рис. 9.17 и 9.20). В этом случае даже при  $A < 1$  кривые могут оказаться двугорбыми.

Пусть, наконец,

$$\omega_{p1} \neq \omega_{p2}$$

и

$$\frac{Q_2}{\omega_{p2}} \neq \frac{Q_1}{\omega_{p1}}.$$

В этом случае прямая проходит выше или ниже начала координат под углом, отличным от  $45^\circ$  (например прямые  $ff'$  на рис. 9.17 и 9.20). Резонансные кривые получаются при этом несимметричными, максимумы взаимной проводимости неодинаковыми. В этом случае один из максимумов может достигать значения  $Y_{12mm}$  (отношение  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = 1$ ). Так же, как и в предыдущем случае, при  $A < 1$  резонансные кривые могут оказаться двугорбыми, но несимметричными.

Из рассмотренных в этом параграфе примеров видны преимущества системы двух связанных контуров с  $Q_1 = Q_2$  и  $\omega_{p1} = \omega_{p2}$ . Только в этом случае  $Y_{12}$  достигает максимальных возможных значений  $Y_{12mm}$  при симметричной кривой.

Кроме того, для этого случая прямая проходит через вершины «холмов», и небольшое смещение ее при изменении параметров контуров будет мало сказываться на кривой изменения  $Y_{12}$  от  $\omega$ . В других же случаях прямая проходит по склонам «холмов», где крутизна довольно велика. Поэтому те же небольшие смещения прямой вызовут намного большие изменения кривой  $Y_{12}$ , что бывает нежелательно.

### § 9.13. Воздействие модулированных колебаний на системы связанных контуров

Кратко поясним, каким образом можно найти ток во втором контуре системы связанных контуров, если в первый контур включена амплитудно-модулированная эдс. В параграфах 9.8 и 9.10 мы показали, что в ряде случаев резонансные кривые взаимной проводимости подобны резонансной кривой одиночного последовательного контура. В этих случаях и ток, протекающий во втором контуре, будет иметь такой же характер, как ток, протекающий в одиночном последовательном контуре при воздействии на него амплитудно-модулированной эдс (см. гл. 6).

Если резонансные кривые связанных контуров отличаются от резонансной кривой одиночного контура, но симметричны, то ток может быть найден способом, аналогичным приведенному в § 6.9, где подробно рассматривалось воздействие модулированного напряжения на цепь с проводимостью, значения которой симметричны относительно частоты  $\omega_p$ . Для нахождения тока  $I_2$  в связанных контурах необходимо,

конечно, умножать эдс на взаимную проводимость  $Y_{12}$  (в § 6.9 мы имели дело с простой проводимостью). Заметим, что при двугорбой резонансной кривой взаимная проводимость для несущей частоты может оказаться меньше, чем для боковых частот. Это приведет к увеличению коэффициента модуляции тока по сравнению с коэффициентом модуляции эдс. Может иметь место и такой случай, когда амплитуды колебаний боковых частот тока станут больше половины амплитуды колебания несущей частоты, т. е. наступит перемодуляция.

При частотной и фазовой модуляции для связанных контуров полностью применимы методы исследования, изложенные в гл. 7.

### § 9.14. Воздействие импульсов на связанные одинаковые контуры

В этом параграфе мы рассмотрим воздействие импульсов на связанные контуры.

Сначала подробно исследуем нестационарные процессы в двух одинаковых связанных контурах, поскольку такая система особенно часто применяется на практике.

С целью облегчения исследования преобразуем выражение (9.45) для взаимной проводимости, считая параметры обоих контуров одинаковыми ( $L_1 = L_2 = L$ ;  $C_1 = C_2 = C$ ;  $r_1 = r_2 = r$ ) и отбрасывая знак  $\pm$  как несущественный в данном случае. В результате получим

$$Y_{12} = i \frac{1}{2r} \cdot \frac{2A}{(1 + i\xi)^2 + A^2} = i \frac{A}{r} \cdot \frac{1}{1 + i(\xi + A)} \cdot \frac{1}{1 + i(\xi - A)}.$$

Иначе это можно записать в виде

$$Y_{12} = \frac{1}{2r[1 + i(\xi - A)]} - \frac{1}{2r[1 + i(\xi + A)]},$$

в чем нетрудно убедиться, приведя эти дроби к общему знаменателю и сложив их.

Далее обозначим

$$\begin{aligned} \xi' = \xi + A &= Q \frac{2(\omega - \omega_p)}{\omega_p} + A = Q \frac{2\left(\omega - \omega_p + \frac{A}{2Q} \omega_p\right)}{\omega_p} = \\ &= \frac{\omega_p L}{r} \cdot \frac{2(\omega - \omega')}{\omega_p} = \frac{\omega' L}{r} \cdot \frac{2(\omega - \omega')}{\omega'} = Q' \frac{2(\omega - \omega')}{\omega'}, \end{aligned}$$

где

$$\boxed{\omega' = \omega_p \left(1 - \frac{A}{2Q}\right)}. \quad (9.65)$$

Таким образом,  $\xi'$  — обобщенная расстройка для контура с резонансной частотой  $\omega'$ , сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$ .

Совершенно аналогично обозначим

$$\xi'' = \xi - A = \frac{\omega'' L}{r} \cdot \frac{2(\omega - \omega'')}{\omega''} = Q'' \frac{2(\omega - \omega'')}{\omega''},$$

где

$$\boxed{\omega'' = \omega_p \left(1 + \frac{A}{2Q}\right)}. \quad (9.66)$$

$\xi'$  — обобщенная расстройка для контура с резонансной частотой  $\omega''$ , сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$ . Подставляя  $\xi'$  и  $\xi''$  в выражение для  $\mathbf{Y}_{12}$ , получим

$$\boxed{\mathbf{Y}_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r(1 + i\xi'')} - \frac{1}{r(1 + i\xi')} \right]}. \quad (9.67)$$

Таким образом, взаимную проводимость двух связанных одинаковых контуров, имеющих сопротивление  $r$ , индуктивность  $L$ , резонансную частоту  $\omega_p$  и добротность  $Q$  можно представить, как полуразность проводимостей двух колебательных контуров с сопротивлениями  $r$ , индуктивностями  $L$  и резонансными частотами  $\omega''$  и  $\omega'$  (см. 9.65 и 9.66).

Выясним, чем характерны частоты  $\omega'$  и  $\omega''$ . Для этого выразим отношение  $\frac{A}{2Q}$  через коэффициент связи.

При индуктивной связи ( $x_c = \omega_p L_c$ )

$$\frac{A}{2Q} = \frac{\frac{\omega_p L_c}{r}}{2 \frac{\omega_p L}{r}} = \frac{k_L}{2} \quad (9.68)$$

(мы берем значение  $x_c$  на резонансной частоте, считая его примерно постоянным в пределах полосы пропускания).

При емкостной связи

$$\frac{A}{2Q} = \frac{\frac{1}{\omega_p C_c r}}{2 \frac{1}{\omega_p C r}} = \frac{k_C}{2}. \quad (9.69)$$

Таким образом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega_p \left(1 - \frac{k}{2}\right) \\ \omega'' &= \omega_p \left(1 + \frac{k}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (9.70)$$

где  $k = k_L$  или  $k = k_C$ .

На основании ф-л (9.55) и (9.59) мы получим при малом  $k$  следующие выражения для частот связи:

$$\omega_{a,b} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 \mp k_L}} \approx \omega_p \left(1 \mp \frac{k_L}{2}\right)$$

для индуктивной и трансформаторной связи и

$$\omega_{a,b} = \omega_p \sqrt{1 \mp k_C} \approx \omega_p \left(1 \mp \frac{k_C}{2}\right)$$

для емкостной связи.

Из сравнения этих выражений с (9.70) мы видим, что частоты  $\omega'$  и  $\omega''$  являются частотами связи.

Если в первом контуре будет действовать эдс  $e(t)$  со спектральной функцией  $\mathbf{G}_e(\omega)$ , то спектральная функция тока во втором контуре будет равна

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{G}_e(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{G}_e(\omega)}{r(1 + i\xi'')} - \frac{\mathbf{G}_e(\omega)}{r(1 + i\xi')} \right].$$

Поэтому ток, текущий во втором контуре, будет равен

$$i_2 = \frac{1}{2} (i'' - i'), \quad (9.71)$$

где  $i''$  — ток, соответствующий спектральной функции

$$\frac{\mathbf{G}_e(\omega)}{r(1 + i\xi'')},$$

т.е. ток, который потечет под действием эдс  $e(t)$  в последовательном колебательном контуре с сопротивлением  $r$ , индуктивностью  $L$  и резонансной частотой  $\omega''$ ;  $i'$  — ток, соответствующий спектральной функции

$$\frac{\mathbf{G}_e(\omega)}{r(1 + i\xi')},$$

т.е. ток, который потечет под действием эдс  $e(t)$  в последовательном колебательном контуре с сопротивлением  $r$ , индуктивностью  $L$  и резонансной частотой  $\omega'$ . Токи  $i'$  и  $i''$  мы можем найти для ряда случаев, пользуясь гл. 8, а, зная  $i'$  и  $i''$ , мы сразу найдем ток  $i_2$ .

Для отыскания тока первого контура исследуем проводимость схемы замещения этого контура  $\mathbf{Y}_{1э}$ . Она выражается ф-лой (9.32). Действуя совершенно аналогично предыдущему и принимая во внимание, что контуры одинаковы, мы ее можем представить в виде

$$\mathbf{Y}_{1э} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r(1 + i\xi'')} + \frac{1}{r(1 + i\xi')} \right], \quad (9.72)$$

где обозначения те же, что и в предыдущих формулах этого параграфа.

Отыскивая ток в первом контуре  $i_1$  под действием импульса эдс  $e(t)$ , мы, действуя совершенно аналогично предыдущему, получим

$$i_1 = \frac{1}{2} (i'' + i'). \quad (9.73)$$

Здесь  $i'$  и  $i''$  те же, что и в ф-ле (9.71).

При выводе этих формул мы пользовались приближенной формулой для расстроек и считали  $A$  постоянным, что справедливо только вблизи резонансной частоты. При частотах, сильно отличающихся от резонансной, эти формулы неточны, однако спектральная функция тока на таких частотах мала и поэтому допущенная неточность незначительно влияет на общий ток.

На основании полученных общих положений разберем ряд частных случаев.

а) Собственные колебания в двух связанных одинаковых контурах

Если в связанных одинаковых контурах действовал импульс эдс, то по прекращении действия этого импульса в контурах могут совершаться собственные колебания. На основании ф-л (9.71) и (9.72) эти колебания будут состоять из алгебраической суммы колебаний  $i'$  и  $i''$ , получающихся в двух простых колебательных контурах под действием такой же эдс. Колебания в простых последовательных контурах после прекращения действия в них эдс определяются выражением (8.6). Отсюда с учетом сказанного выше о токах  $i'$  и  $i''$  следует, что собственные колебания в одинаковых связанных контурах будут определяться выражениями:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2} B'' e^{-\alpha t} \cos(\omega'' t + \psi'') + \frac{1}{2} B' e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \psi'), \\ i_2 = \frac{1}{2} B'' e^{-\alpha t} \cos(\omega'' t + \psi'') - \frac{1}{2} B' e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \psi'), \end{cases}$$

где  $\alpha = \frac{r}{2L}$ ,  $\omega'$  и  $\omega''$  — частоты связи,  $B'$ ,  $B''$ ,  $\psi'$  и  $\psi''$  определяются внешними воздействиями, создавшими собственные колебания.

б) Воздействие короткого импульса на одинаковые связанные контуры

Найдем вначале токи  $i'$  и  $i''$ , получающиеся при воздействии короткого импульса на контуры с резонансными частотами  $\omega'$  и  $\omega''$ , равными частотам связи, и одинаковыми  $r$  и  $L$ .

Учитывая, что в данном случае (см. табл. 8.1)

$$\mathbf{G}_e(\omega) = S,$$

где  $S$  — площадь импульса, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e(\omega_p) &= S, \\ \varphi &= 0. \end{aligned}$$

На основании ф-лы (8.67) получим

$$\begin{aligned} i' &= \frac{S}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega' t, \\ i'' &= \frac{S}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega'' t, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{r}{2L}.$$

Поэтому

$$i_1 = \frac{1}{2} (i'' + i') = \frac{S}{2L} e^{-\alpha t} (\cos \omega'' t + \cos \omega' t)$$

и

$$i_2 = \frac{1}{2} (i'' - i') = \frac{S}{2L} e^{-\alpha t} (\cos \omega'' t - \cos \omega' t).$$

Отсюда, используя формулы тригонометрии и ф-лы (9.70), получим

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{S}{L} e^{-\alpha t} \cos \frac{\omega'' - \omega'}{2} t \cos \frac{\omega'' + \omega'}{2} t = \\ &= \frac{S}{L} e^{-\alpha t} \cos \frac{\kappa \omega_p}{2} t \cos \omega_p t. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Аналогично

$$i_2 = -\frac{S}{L} e^{-\alpha t} \sin \frac{\kappa \omega_p}{2} t \sin \omega_p t. \quad (9.75)$$

На рис. 9.30 *a* и *б* изображены временные диаграммы для полученных значений  $i_2$  и  $i_1$  соответственно. Из этих рисунков видно, что в первый момент сразу возникают колебания в первом контуре, при этом ток  $i_2$  равен нулю. Затем амплитуда тока  $i_1$  падает, а ток  $i_2$  растет.

В тот момент, когда амплитуда тока  $i_2$  достигает максимума, амплитуда тока  $i_1$  становится равной нулю. Затем амплитуда тока  $i_1$  начинает возрастать, а  $i_2$  падать.

При этом процессе происходит непрерывный переход энергии из одного контура в другой. В тот момент, когда энергия в первом контуре максимальна, энергия во втором контуре равна нулю.

Чем больше связь между контурами, тем быстрее происходит переход энергии из одного контура в другой, т.е. тем больше частота биений между колебаниями с частотами  $\omega'$  и  $\omega''$ . Чем больше добротность контуров, тем медленнее затухают амплитуды колебаний.

Эти процессы можно объяснить так: при воздействии короткого импульса в первом контуре сразу возникают колебания с частотой  $\omega_p$  (так же, как в одиночном контуре). Колебания во втором контуре еще не возникли вследствие его инерционности, поэтому второй контур на первый контур вначале не влияет. Однако во втором контуре сразу же возникает эдс, которая для случая индуктивной связи будет приблизительно равна

$$E_2 = i \omega_p M I_1.$$

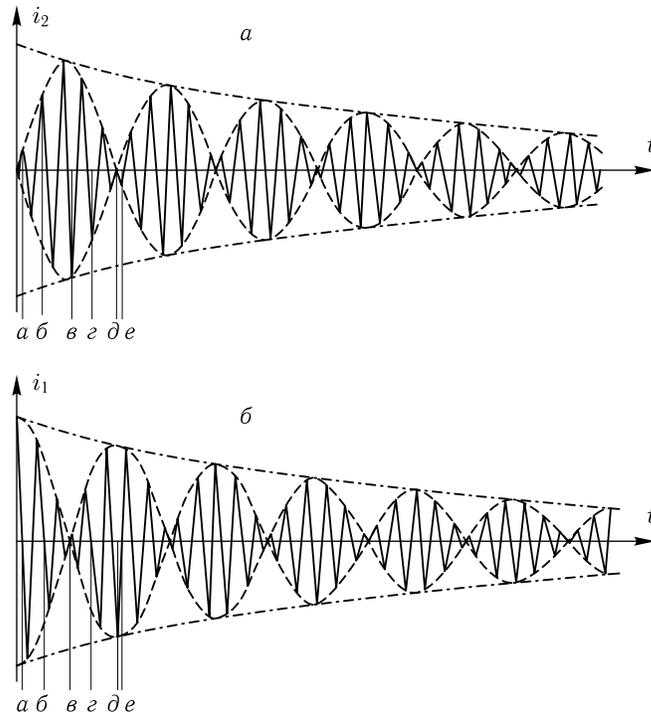


Рис. 9.30. Зависимость тока в первом и втором контурах при воздействии на систему связанных контуров короткого импульса

Под действием этой синусоидальной эдс колебания во втором контуре начинают постепенно нарастать. Возникающий ток  $I_2$  будет совпадать по фазе с эдс  $E_2$ . Этот ток будет в свою очередь наводить в первом контуре эдс  $E_1$ .

На векторной диаграмме рис. 9.31а изображены векторы  $I_1$ ,  $E_2$ ,  $I_2$  и  $E_1$  в начале процесса (для момента  $a$  на временной диаграмме рис. 9.30). Из векторной диаграммы видно, что эдс  $E_1$  будет в противофазе с током  $I_1$ , следовательно, ток  $I_1$  будет уменьшаться этой эдс. Ток  $I_2$  будет в фазе с эдс  $E_2$  и будет увеличиваться.

Через некоторое время векторная диаграмма примет вид, изображенный на рис. 9.31б. Он соответствует моменту  $b$  на рис. 9.30. На этой диаграмме ток  $I_2$  возрос благодаря действию эдс  $E_2$ . Возросла и вызванная им эдс  $E_1$ . Ток  $I_1$  под действием эдс  $E_1$  уменьшился. Уменьшилась и связанная с ним эдс  $E_2$ .

Далее процесс будет продолжаться в том же направлении, и через некоторое время мы получим некоторую диаграмму рис. 9.31 в, на которой ток  $I_1$ , а следовательно, и эдс  $E_2$  равны нулю. Эта диаграмма соответствует моменту  $v$  на рис. 9.30.

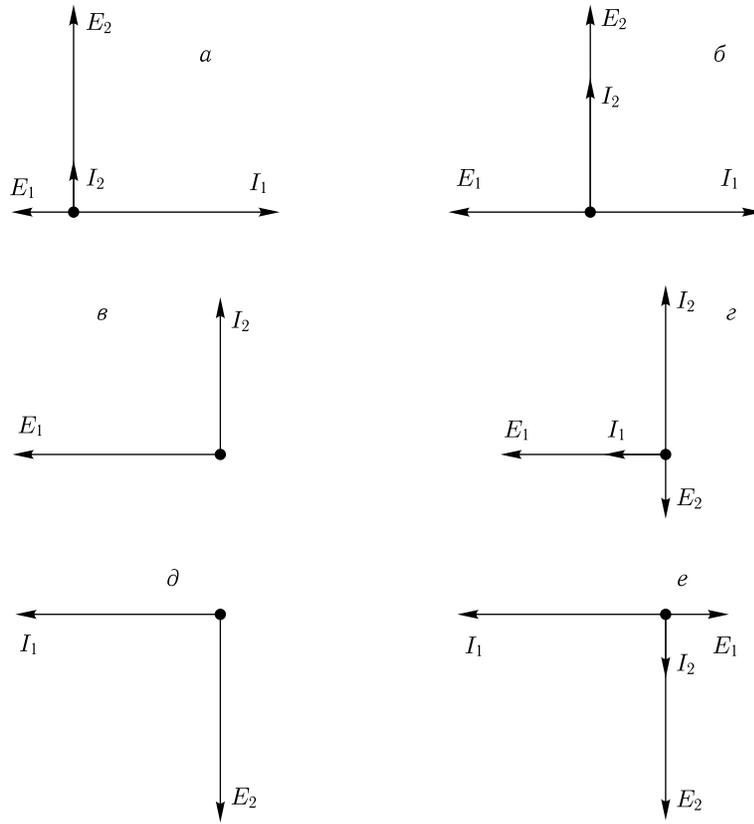


Рис. 9.31. Векторные диаграммы, поясняющие зависимости рис. 9.30, построенные для случая индуктивной связи

Затем эдс  $\mathbf{E}_1$  будет создавать ток в первом контуре  $\mathbf{I}_1$  в фазе с собой, т.е. в противофазе первоначальному направлению тока  $\mathbf{I}_1$  (рис. 9.31г, соответствующий моменту г). Перемена сдвига фаз тока  $\mathbf{I}_1$  вызовет перемену сдвига фаз создаваемой им эдс  $\mathbf{E}_2$ . Эта эдс станет в противофазе с током  $\mathbf{I}_2$  и начнет его уменьшать. Теперь  $\mathbf{I}_2$  и  $\mathbf{E}_1$  будут уменьшаться, а  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  увеличиваться.

Это будет продолжаться пока  $\mathbf{I}_2$  и  $\mathbf{E}_1$  не сделаются равными нулю (рис. 9.31д), после чего  $\mathbf{I}_2$ , а следовательно, и  $\mathbf{E}_1$  переменят сдвиг фаз на противоположный (рис. 9.31е). При этом  $\mathbf{E}_1$  окажется в противофазе с  $\mathbf{I}_1$  и начнет его уменьшать, а  $\mathbf{I}_2$  окажется в фазе с  $\mathbf{E}_2$  и будет увеличиваться.

Таким образом, колебания поочередно нарастают то в одном, то в другом контуре. При этом энергия колебаний постепенно, переходя в тепло, тратится в активных сопротивлениях контуров.

в) Включение и выключение синусоидальной эдс с частотой  $\omega_p$  в системе связанных одинаковых контуров

Рассмотрим ток  $i_2$  в системе одинаковых связанных контуров, если в первый контур в момент  $t = 0$  включается синусоидальная эдс с частотой  $\omega_0$ , равной резонансной частоте контуров  $\omega_p$ . Таким образом, в данном случае:

$$\begin{aligned} e &= E_m \cos(\omega_0 t + \varphi) & \text{при } t > 0, \\ e &= 0 & \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Ток  $i_2$  найдем по ф-ле (9.71). В ней  $i'$  равняется току, текущему под действием эдс  $e$  в последовательном колебательном контуре с резонансной частотой  $\omega'$ . В соответствии с ф-лой (8.9) этот ток равен

$$i' = \frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi'^2}} [\cos(\omega_0 t + \varphi - \beta') - e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \varphi - \beta')],$$

где

$$\begin{aligned} \xi' &= Q'\nu' = \frac{\omega' L}{r} \cdot \frac{2(\omega_0 - \omega')}{\omega'} = \frac{2L}{r} (\omega_0 - \omega'), \\ \alpha &= \frac{r}{2L}, \quad \beta' = \arctg \xi'. \end{aligned}$$

Учитывая ф-лу (9.65) и принимая во внимание, что  $\omega_0 = \omega_p$ , получим  $\xi' = A$ ;  $\beta' = \arctg A$ ;

$$i'' = \frac{E_m}{r\sqrt{1+\xi''^2}} [\cos(\omega_0 t + \varphi - \beta'') - e^{-\alpha t} \cos(\omega'' t + \varphi - \beta'')],$$

где

$$\begin{aligned} \xi'' &= Q''\nu'' = \frac{\omega'' L}{r} \cdot \frac{2(\omega_0 - \omega'')}{\omega''} = \frac{2L}{r} (\omega_0 - \omega''); \\ \beta'' &= \arctg \xi''. \end{aligned}$$

Учитывая ф-лу (9.65), получим

$$\xi'' = -A,$$

и

$$\beta'' = -\beta' = -\arctg A.$$

Ток во втором контуре равен

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{2} (i'' - i') = -\frac{E_m}{r\sqrt{1+A^2}} \times \\ &\times \left[ \sin \beta' \sin(\omega_0 t + \varphi) - e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{k}{2} \omega_0 t + \beta'\right) \sin(\omega_0 t + \varphi) \right] = \\ &= -\frac{E_m \sin \beta'}{r\sqrt{1+A^2}} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0}{2} t + \beta'\right)}{\sin \beta'} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Из треугольника, изображенного на рис. 9.32, видно, что

$$\sin \beta' = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Учитывая это, получим

$$i_2 = -\frac{E_m}{r} \cdot \frac{A}{1+A^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}t + \beta'\right)}{\sin \beta'} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.76)$$

На рис. 9.33 изображена зависимость  $i_2$  от  $t$ . Как видно из рисунка и приведенной формулы, амплитуда тока возрастает, начиная с нуля, и совершает затухающие колебания около установившегося значения, равного

$$\frac{E_m}{r} \cdot \frac{A}{1+A^2} = I_{2\text{мм}} \cdot \frac{2A}{1+A^2}.$$

Чем больше величина  $\alpha = \frac{\omega_p}{2Q} = \frac{r}{2L}$ , тем быстрее затухают эти колебания и наступает установившийся режим.

Рассмотрим закон изменения тока  $i_2$  во втором контуре, если действовавшая в первом контуре синусоидальная эдс  $e$  с частотой, равной резонансной частоте контуров, в момент времени  $t = 0$  внезапно станет равной нулю, т. е.

$$\begin{aligned} e &= E_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) && \text{при } t \leq 0, \\ e &= 0 && \text{при } t > 0. \end{aligned}$$

Решая эту задачу методом, аналогичным предыдущему, получим

$$i_2 = \frac{1}{2} (i'' - i') = -\frac{E_m}{r} \cdot \frac{A}{1+A^2} e^{-\alpha t} \frac{\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}t + \beta'\right)}{\sin \beta'} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.77)$$

Временная диаграмма  $i_2$  для этого случая дана на рис. 9.34.

Таким образом, ток  $i_2$  в момент выключения эдс будет иметь амплитуду и сдвиг фаз такие же, как и до выключения. Затем он будет меняться так же, как и при воздействии короткого импульса, причем в системе будут совершаться собственные колебания.

При воздействии на систему контуров синусоидальных импульсов с прямоугольной огибающей в момент появления импульса процессы будут происходить такие, как при включении синусоидальной эдс, а в момент окончания такие, как при выключении синусоидальной эдс. Для того, чтобы импульс не сильно искажался, необходимо брать

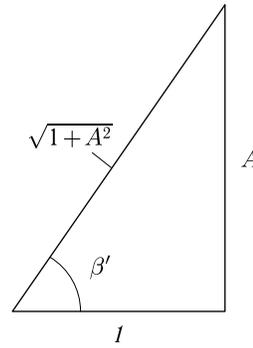


Рис. 9.32. Треугольник, поясняющий преобразование, производимые с ф-лой (9.76).  
 $\beta' = \text{arctg } A$

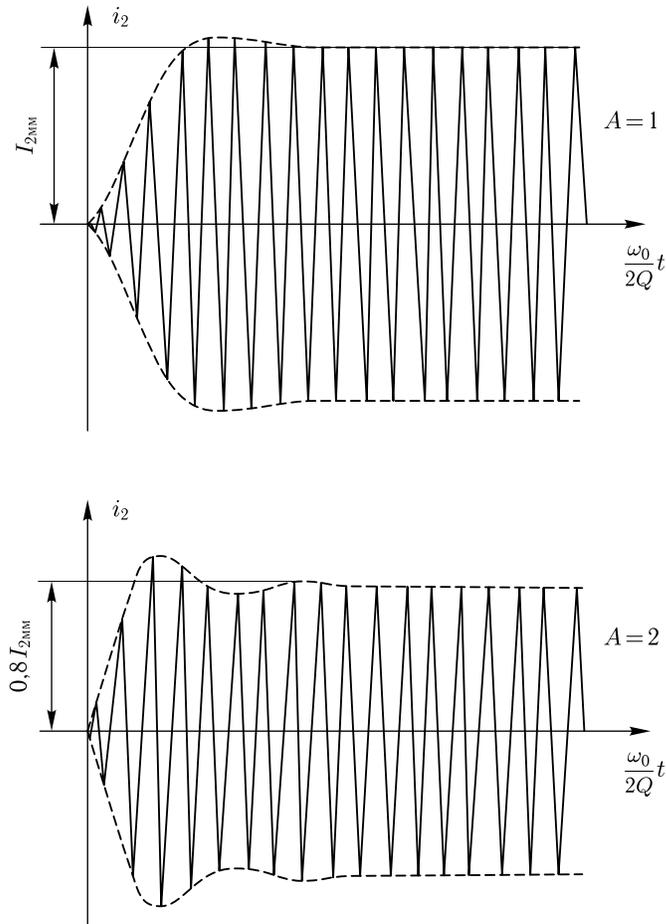


Рис. 9.33. Зависимость тока во втором контуре от времени при включении в первый контур синусоидальной эдс

$A$  и  $Q$  не слишком большими, т. е. брать систему с резонансной кривой, не имеющей большого провала в середине и с достаточно широкой полосой пропускания.

В соответствии с рис. 9.33 и 9.34 время нарастания колебаний с 0,1 до 0,9 установившейся амплитуды при  $A = 1$  будет определяться выражением

$$\tau_n = \frac{3,1Q}{\omega_0} = \frac{4,5}{2\Delta\omega}, \quad (9.78)$$

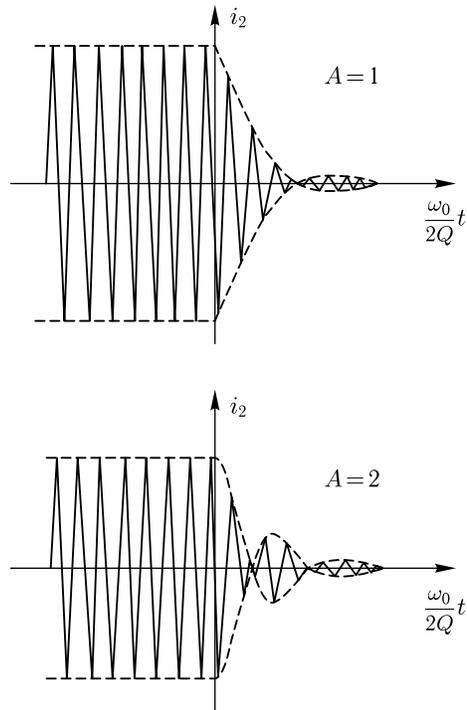


Рис. 9.34. Зависимость тока во втором контуре от времени при выключении синусоидальной эдс из первого контура

где  $2\Delta\omega$  — полоса резонансной кривой при  $A = 1$ , взятая на уровне  $\frac{Y_{12}}{Y_{12mm}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Время затухания колебаний амплитуды с 0,9 до 0,1 от установившейся будет выражаться этой же формулой.

Сравнивая эту формулу с ф-лами (8.75) и (8.76), дающими зависимость времени нарастания от полосы пропускания для одиночного контура и для устройства с идеальной резонансной кривой, мы видим, что соотношения получаются примерно одинаковыми.

### § 9.15. Воздействие импульсов на связанные контуры (общий случай)

Докажем вначале, что любую резонансную кривую системы связанных контуров можно представить в виде суммы двух простейших резонансных кривых, подобных резонансной кривой одиночного контура.

Возьмем выражение для взаимной проводимости

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_c^2}.$$

Обозначим  $p = i\omega$ . Тогда для случая индуктивной или трансформаторной связи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_c &= pL_c \quad \text{или} \quad \mathbf{Z}_c = pM, \\ \mathbf{Z}_1 &= r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}, \\ \mathbf{Z}_2 &= r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}. \end{aligned}$$

Подставим эти значения в ф-лу (9.38):

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{pL_c}{\left(r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}\right) \left(r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}\right) - p^2 L_c^2}.$$

Умножив числитель и знаменатель на  $\frac{p^2}{L_1 L_2 (1 - k_L^2)}$ , где  $k_L = \frac{L_c}{\sqrt{L_1 L_2}}$ , раскрыв скобки и сделав приведение подобных членов, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{12} &= \\ &= \frac{p^3 \frac{L_c}{L_1 L_2 - L_c^2}}{p^4 + p^3 \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 - k_L^2} + p^2 \frac{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}{1 - k_L^2} + p \frac{2(\omega_{p1}^2 \alpha_2 + \omega_{p2}^2 \alpha_1)}{1 - k_L^2} + \frac{\omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2}{1 - k_L^2}} = \\ &= \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (9.79) \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{2L_1}; \quad \omega_{p1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad \alpha_2 = \frac{r_2}{2L_2}; \quad \omega_{p2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}};$$

$A(p)$  и  $B(p)$  — полиномы от  $p$ .

Разложим знаменатель полученного выражения на множители:

$$B(p) = (p - p_0)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4), \quad (9.80)$$

где  $p_1, p_2, p_3, p_4$  — корни уравнения  $B(p) = 0$ .

Попытаемся найти эти корни, предположив, что они комплексные. Расчет покажет справедливость этого предположения. Поскольку коэффициенты при степенях  $p$  действительные, то корни уравнения будут попарно сопряженными.

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\alpha_a + i\omega_a \\ p_2 &= -\alpha_a + i\omega_a \\ p_3 &= -\alpha_b + i\omega_b \\ p_4 &= -\alpha_b + i\omega_b \end{aligned} \right\} \quad (9.81)$$

Подставляя эти величины в правую часть равенства (9.80), раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$  в правой и левой частях равенства, получим четыре уравнения, из которых можно определить  $\alpha_a$ ,  $\omega_a$ ,  $\alpha_b$ ,  $\omega_b$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-k_L^2} (\alpha_1 + \alpha_2) &= \alpha_a + \alpha_b \\ \frac{1}{1-k_L^2} (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2 + 4\alpha_1\alpha_2) &= \omega_a^2 + \omega_b^2 + 4\alpha_a\alpha_b + \alpha_a^2 + \alpha_b^2 \\ \frac{1}{1-k_L^2} (\alpha_1\omega_{p2}^2 + \alpha_2\omega_{p1}^2) &= \alpha_a\omega_b^2 + \alpha_b\omega_a^2 + \alpha_a\alpha_b(\alpha_a + \alpha_b) \\ \frac{1}{1-k_L^2} \omega_{p1}^2\omega_{p2}^2 &= \omega_a^2\omega_b^2 + \alpha_a^2\omega_b^2 + \alpha_b^2\omega_a^2 + \alpha_a^2\alpha_b^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.82)$$

Точное решение этих уравнений в общем виде получить здесь не удастся, так как они сводятся к полному уравнению четвертой степени. Приближенное решение получить нетрудно, если пренебречь во втором и четвертом уравнениях членами, содержащими  $\alpha$ , и найти из них  $\omega_a$  и  $\omega_b$ . Это пренебрежение можно сделать, так как

$$\frac{\alpha_1^2}{\omega_{p1}^2} = \frac{r_1^2}{4L_1^2} = \frac{1}{4Q_1^2} \ll 1$$

и

$$\frac{\alpha_2^2}{\omega_{p2}^2} = \frac{1}{4Q_2^2} \ll 1.$$

Кроме того, как мы увидим,  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  имеют тот же порядок величины, что и  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а  $\omega_a$  и  $\omega_b$  тот же порядок, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Покажем, что при этом пренебрежении  $\omega_a$  и  $\omega_b$  будут равны частотам связи. Действительно, при таком пренебрежении  $\omega_a$  и  $\omega_b$  будут соответствовать случаю контуров с  $r_1 = r_2 = 0$ . В этом случае, как видно из первого и третьего уравнений,  $\alpha_a = \alpha_b = 0$ . Таким образом, здесь  $i\omega_a$  и  $i\omega_b$  будут корнями уравнения  $B(p) = 0$  и, следовательно, при частотах  $\omega_a$  и  $\omega_b$ ,  $\mathbf{Y}_{12} = \infty$ . Но частоты, при которых  $\mathbf{Y}_{12} = \infty$ , если положить  $r_1 = r_2 = 0$ , мы называли в § 9.9 частотами связи. Поскольку частоты связи мы уже отыскивали в § 9.9 и подробно там исследовали, здесь мы их снова искать не будем. Отметим только, что частоты связи имеют тот же порядок величины, что и частоты  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$ .

Из первого и третьего уравнений, пренебрегая в третьем величиной  $\alpha_a \alpha_b (\alpha_a + \alpha_b)$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \frac{1}{1 - k_L^2} \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\omega_b^2 - \omega_{p2}^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2} \right) + \alpha_2 \frac{\omega_{p1}^2 - \omega_a^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2} \right] \\ \alpha_b &= \frac{1}{1 - k_L^2} \left[ \alpha_1 \frac{\omega_b^2 - \omega_{p2}^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2} + \alpha_2 \left( 1 - \frac{\omega_{p1}^2 - \omega_a^2}{\omega_b^2 - \omega_a^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

Из этих уравнений видно, что  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  имеют тот же порядок, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Заметим, что при  $k_L \rightarrow 0$   $\omega_a$  и  $\omega_b$  соответственно стремятся к  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$ ,  $\alpha_a \rightarrow \alpha_1$  и  $\alpha_b \rightarrow \alpha_2$ .

Как известно, выражение (9.79) для взаимной проводимости всегда можно разложить на простые дроби:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{12} &= \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3} + \frac{A_4}{p - p_4} = \frac{A_1}{\alpha_a + i(\omega - \omega_a)} + \\ &+ \frac{A_2}{\alpha_a + i(\omega - \omega_a)} + \frac{A_3}{\alpha_b + i(\omega + \omega_b)} + \frac{A_4}{\alpha_b + i(\omega - \omega_b)}. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4$  могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}; & A_3 &= \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} \\ A_2 &= \frac{A(p_2)}{B'(p_2)}; & A_4 &= \frac{A(p_4)}{B'(p_4)}. \end{aligned}$$

Здесь  $A(p)$  — числитель ф-лы (9.79). В знаменателях стоят значения производной  $\frac{dB(p)}{dp}$  при  $p = p_1$ ;  $p = p_2$  и т. д. Если затухания  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  невелики, то в интересующей нас области частот, близких к частотам связи  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , можно соответственно пренебречь первым и третьим членами суммы (9.84) по сравнению со вторым и четвертым, и считать взаимную проводимость приближенно равной

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{12} &\approx \frac{A_2}{\alpha_a + i(\omega - \omega_a)} + \frac{A_4}{\alpha_b + i(\omega - \omega_b)} = \\ &= \frac{A_2}{\alpha_a \left( 1 + i \frac{\omega - \omega_a}{\alpha_a} \right)} + \frac{A_4}{\alpha_b \left( 1 + i \frac{\omega - \omega_b}{\alpha_b} \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что любую резонансную кривую системы связанных колебательных контуров можно представить в виде суммы двух резонансных кривых, подобных кривым одиночного контура. Поэтому процессы, возникающие в колебательных связанных контурах при воздействии на них импульсов эдс, можно рассматривать

как сумму процессов, происходящих в одиночных колебательных контурах, резонансные частоты которых равны частотам связи, а затухания определяются из выражений (9.83).

Это исследование мы провели для индуктивной связи. Подобное же исследование можно провести и для емкостной связи между контурами. Оно дает аналогичные результаты.

Рассмотренный случай не охватывает систем, состоящих из колебательного и апериодического контуров. Однако, как было показано в § 9.8, резонансные кривые этих систем соответствуют резонансным кривым последовательных колебательных контуров, поэтому и воздействие импульсов на них будет таким же, как и на последовательные контуры.